Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
II Compitino — 17 Maggio 2013
Durata: 2 ore

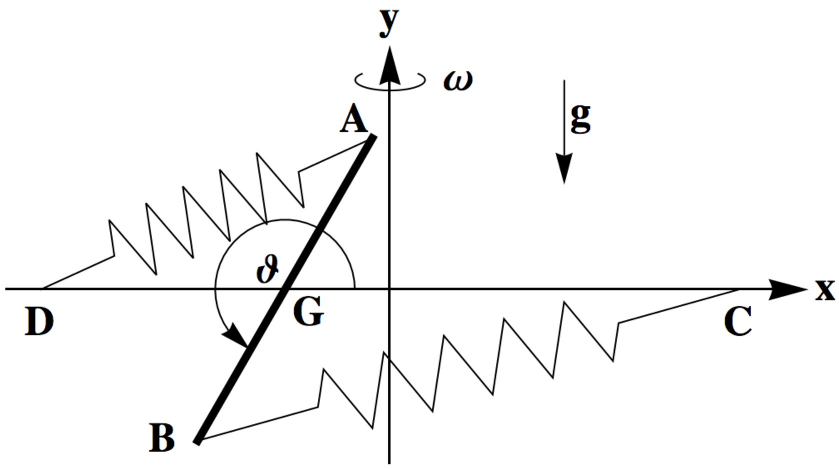
Esercizio 1. Il sistema cartesiano $(Oxyz)$, con asse y verticale ascendente:

$$\mathbf{g} = -g\hat{y}$$

$g > 0$, è associato ad uno spazio non inerziale uniformemente rotante attorno all'asse y rispetto ai sistemi inerziali con velocità angolare di trascinamento

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{y}$$

con ω costante. Nel piano Oxy è vincolata una sbarretta omogenea AB di lunghezza $\ell = |AB|$ e massa m e con il baricentro G vincolato a scorrere sull'asse x, il tutto senza attrito.



Tra il punto $D = (-a, 0)$ e A è tesa una molla di costante elastica $h > 0$ e così pure tra il punto $C = (a, 0)$ e B. Scegliendo come coordinate Lagrangiane l'ascissa x del centro di massa G e l'angolo orientato ϑ dal semiasse delle x positive alla semiretta orientata AB:
a. determinare gli equilibri del sistema;
b. studiarne la stabilità al variare di ω nei reali positivi;
c. individuata una configurazione di equilibrio stabile, determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad essa.

Esercizio 2.i. Si consideri l'oscillatore armonico con viscosità:

$$m\ddot{x} = -hx - k\dot{x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad h, k > 0.$$

a. Dire (giustificandolo) se la funzione

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + \frac{1}{2}h|x|^2$$

è funzione di Lyapunov per la ovvia configurazione di equilibrio stabile (qual è?) e se permette di dimostrare la stabilità semplice o quella asintotica.
b. Si consideri la funzione

$$\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + \frac{h}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}(m|\dot{x} + \frac{k}{m}x|^2 + h|x|^2).$$

Dimostrare o confutare che è anch'essa funzione di Lyapunov per lo stesso equilibrio e se permette di dimostrare la stabilità semplice o quella asintotica.

Domanda 2.ii. Enunciare e dimostrare il Teorema C^0 della funzione di Lyapunov per la stabilità semplice.

- Si può uscire dall'aula solo **dopo aver consegnato definitivamente** il compito.
- Scrivere nome e cognome su ogni foglio di svolgimento consegnato.
- **Svolgere l'esercizio 1 su di un foglio, l'esercizio e la domanda 2 su di un altro foglio.**
- Consegnare tutti e solo i fogli di bella dedicati allo svolgimento. **Tenete brutta e testo del compito**.
- Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.

Risoluzione di
Esercizio 1 Le coordinate dei punti importanti in questo esercizio sono

$$OA = (x, 0) - \frac{\ell}{2}(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad OB = (x, 0) + \frac{\ell}{2}(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad OG = (x, 0).$$

Il potenziale delle molle sono quindi

$$\mathcal{U}^h_{BC} = \frac{h}{2}|BC|^2 = \frac{h}{2}\left((x - a + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta)^2 + \frac{\ell^2}{4}\sin^2\vartheta\right) \simeq \frac{h}{2}(x-a)(x - a + \ell\cos\vartheta) \simeq \frac{h}{2}(x^2 - 2ax + \ell(x-a)\cos\vartheta)$$

$$\mathcal{U}^h_{AD} = \frac{h}{2}|AD|^2 = \frac{h}{2}\left((x + a - \frac{\ell}{2}\cos\varphi)^2 + \frac{\ell^2}{4}\sin^2\vartheta\right) \simeq \frac{h}{2}(x+a)(x + a - \ell\cos\vartheta) \simeq \frac{h}{2}(x^2 + 2ax - \ell(x+a)\cos\vartheta).$$

Sommando si ottiene

$$\mathcal{U}^h = h(x^2 - \ell a\cos\vartheta).$$

Il potenziale gravitazionale è costante, e quindi non si considera; il potenziale centrifugo richiede invece un calcolo più elaborato. Chiamando I_a il momento angolare dell'asta rispetto all'asse y, si ha che

$$\mathcal{U}^{cf}_{AB} = -\frac{1}{2}\omega^2 I_a$$

Il calcolo di I_a necessita l'operatore di inerzia relativo a G che, scritto nel riferimento solidale all'asta

$$e_1 = e_{BA} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\\ 0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \hat{z}\wedge e_1 = \begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\\ 0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \hat{z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

è rappresentato dalla matrice

$$\mathcal{I}_G = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & m\frac{\ell^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & m\frac{\ell^2}{12}\end{pmatrix}.$$

Il versore velocità angolare in tale sistema di riferimento è $\hat{y} = \sin\vartheta\, e_1 + \cos\vartheta\, e_2$. Da questo segue che, usando il teorema di Konig, $I_a = m\frac{\ell^2}{12}\cos^2\vartheta + mx^2$, e quindi

$$\mathcal{U}^{cf}_{AB} = -\frac{1}{2}m\,\omega^2\left(\frac{\ell^2}{12}\cos^2\vartheta + x^2\right).$$

L'energia potenziale totale $\mathcal{U}$ è la somma delle due energie potenziali $\mathcal{U}^h$ e $\mathcal{U}^{cf}_{AB}$ appena calcolate. Per determinare gli equilibri si uguaglia a zero il gradiente dell'energia potenziale, che è

$$\nabla\mathcal{U} = \begin{pmatrix}2hx - m\,\omega^2\,x\\ h\ell a\sin\vartheta + m\,\frac{\ell^2}{12}\omega^2\,\cos\vartheta\sin\vartheta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(2h - m\,\omega^2)\\ \sin\vartheta\left(h\ell a + m\,\omega^2\,\frac{\ell^2}{12}\,\cos\vartheta\right)\end{pmatrix}.$$

Dalla prima equazione si ha che $x = 0$. Dalla seconda si ha che o $\sin\vartheta = 0$ e quindi $\vartheta = 0, \pi$, oppure $\cos\vartheta = -12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}$. Questa equazione ammette due soluzioni che sono $\vartheta = \pm\arccos\left(-12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}\right)$ solamente quando $12ha < m\omega^2\ell$. Ci sono quindi sempre 2 equilibri $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,\pi)$ e condizionalmente altri due equilibri $P_3 = \left(0, \arccos\left(-12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}\right)\right)$ e $P_4 = \left(0, -\arccos\left(-12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}\right)\right)$.
b. La matrice Hessiana del sistema è

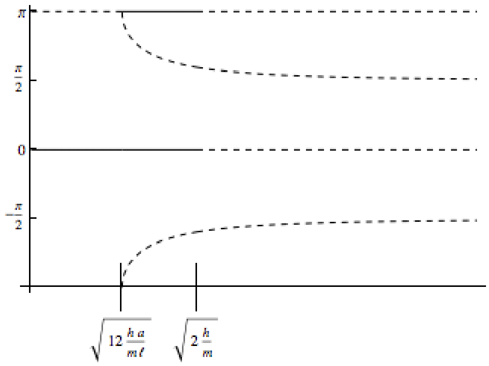
$$HV = \begin{pmatrix}2h - m\omega^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2\cos^2\vartheta + h\,\ell\,a\cos\vartheta - \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2\end{pmatrix}$$

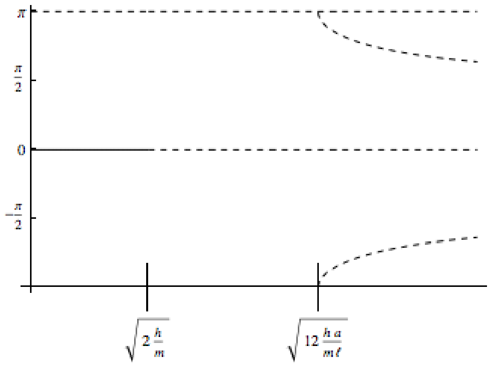
che, nei 4 equilibri $(0,0), (0,\pi), (0,\vartheta_1), (0,\vartheta_2)$ vale rispettivamente

$$H\mathcal{U}(0,0) = \begin{pmatrix}2h - m\omega^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2 + h\,\ell\,a\end{pmatrix}, \quad H\mathcal{U}(0,\pi) = \begin{pmatrix}2h - m\omega^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}\ell(m\,\omega^2\,\ell - 12h\,a)\end{pmatrix},$$

$$H\mathcal{U}(P_3) = H\mathcal{U}(P_4) = \begin{pmatrix}2h - m\omega^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2\left(\left(\frac{12a^2h^2}{m\omega^2\ell}\right)^2 - 1\right)\end{pmatrix}.$$

Segue che l'equilibrio $(0,0)$ è stabile se $2h > m\omega^2$, mentre P_2 lo è non solo quando è verificata questa ipotesi, ma anche quando è verificata l'ipotesi di esistenza degli altri due equilibri (i.e. $12ha < m\omega^2\ell$). Gli ultimi due equilibri P_3 e P_4 sono sempre instabili quando esistono. Il diagramma di biforcazione di questo sistema ha due possibili aspetti a seconda che $12\frac{ha}{m\ell} < 2\frac{h}{m}$ oppure l'opposto. (Al solito, riga continua significa stabile, riga tratteggiata instabile. L'asse delle x tracciato alla quota $-\pi$ non rappresenta equilibri.)





c. Usiamo l'equilibrio $(0,0)$. Per calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni si deve calcolare l'energia cinetica ed è necessario usare la formula $T = \frac{1}{2}m|v_G|^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{I}_G\omega = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{12}\dot{\vartheta}$. La matrice cinetica A è quindi

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\frac{\ell^2}{12} \end{pmatrix}.$$

(le dimensioni delle entrate di questa matrice sembrano incongruenti, ma purtroppo x ha dimensione di mt mentre ϑ è adimensionale.) Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le radici quadrate di $2\dfrac{h}{m} - \omega^2$ e $12\dfrac{h\,a}{m\,\ell} + \omega^2$ (osservate che queste quantità hanno la dimensione di sec^{-1}).

Risoluzione di **Esercizio 2.i.**
a.

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -\frac{h}{m}x - \frac{k}{m}v \qquad (X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$$

La funzione

$$E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}hx^2$$

è funzione di Lyapunov per la stabilità *semplice* della ovvia configurazione di equilibrio, che è $(x^*, v^*) = (0,0)$, infatti

(i) $E(x,v)$ è definita positiva (globalmente in $\mathbb{R}^2$),

(ii) la derivata di Lie: $L_X\,E(x,v) = -kv^2 \leq 0$, dunque è solamente semi-definita negativa, vale infatto zero per ogni $v = 0$ nel piano delle fasi $\mathbb{R}^2$.

b. La funzione

$$\mathcal{E}(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{h}{2}x^2 + \frac{1}{2}(m|v + \frac{k}{m}x|^2 + hx^2).$$

è invece funzione di Lyapunov per la stabilità *asintotica* della configurazione di equilibrio $(x^*, v^*) = (0,0)$, infatti

(i) $\mathcal{E}(x,v)$ è definita positiva (globalmente in $\mathbb{R}^2$), lo studente è invitato a verificarlo,

(ii) la derivata di Lie: $L_X\,\mathcal{E}(x,v) = -kv^2 - \frac{hk}{m}x^2 < 0\ \forall (x,v) \neq (0,0)$, dunque è definita negativa nel piano delle fasi $\mathbb{R}^2$.