UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ORE 09:30 — 25 GIUGNO 2018
DURATA: 2 ORE E 45 MINUTI

Esercizio 1. Sia f la funzione C^∞ da $\mathbb{R}$ in sè definita da

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

(*a*) Studiare il grafico di f.

(*b*) Si consideri l'equazione del primo ordine

$$\dot{x} = f(x)$$

Tracciare il ritratto in fase e discutere l'attrattività/repulsività degli equilibri.

(*c*) Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} = -f'(x) \tag{1}$$

Tracciare il ritratto in fase e discutere la stabilità/instabilità degli equilibri.

(*d*) In riferimento all'equazione (1). Stabilire il sottoinsieme $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}$ dei valori di energia per i quali non esiste alcuna orbita periodica.

(*e*) In riferimento all'equazione (1), si consideri il valore di energia $E = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{6}\right)$.
Ogni orbita di energia E è periodica? Motivare adeguatamente la risposta.
Scrivere la formula (senza svolgere l'integrale) per il periodo dell'orbita periodica corrispondente.

Domanda 1. Sia X un campo vettoriale C^∞ su $\mathbb{R}^n$. Tramite la nozione di derivata di Lie, dare la nozione di funzione di Lyapunov e di integrale primo per X. Si consideri poi il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2-1) \\ \dot{y} = 4x(x^2-1) \end{cases}$$

Verificare che esiste un integrale primo e determinarlo esplicitamente.

⋆ ⋆ ⋆

Esercizio 2. Nel riferimento inerziale ortonormale $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$, si consideri il sistema giacente nel piano Oxy costituito da un'asta AB di massa trascurabile il cui estremo A è libero di scorrere senza attrito lungo l'asse x mentre nell'estremo B vi è un punto materiale di massa m. Inoltre tra l'origine O e il punto B è tesa una molla di costante elastica h. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane (x, θ) rispettivamente ascissa di A e angolo formato dalla direzione negativa dell'asse y con l'asta AB orientato positivamente in senso antiorario.

(*a*) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità al variare del parametro $\lambda = mg/hl$. ⟶

(*b*) Determinare l'energia cinetica del sistema e le frequenze (senza calcolo esplicito) delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.

(*c*) Supponendo $h = 0$, scrivere la funzione di Routh del sistema.

(*d*) Studiare l'invertibilità della mappa $p = \nabla_{\dot{q}} L$ e scrivere la funzione Hamiltoniana nelle giuste variabili di spazio delle fasi.

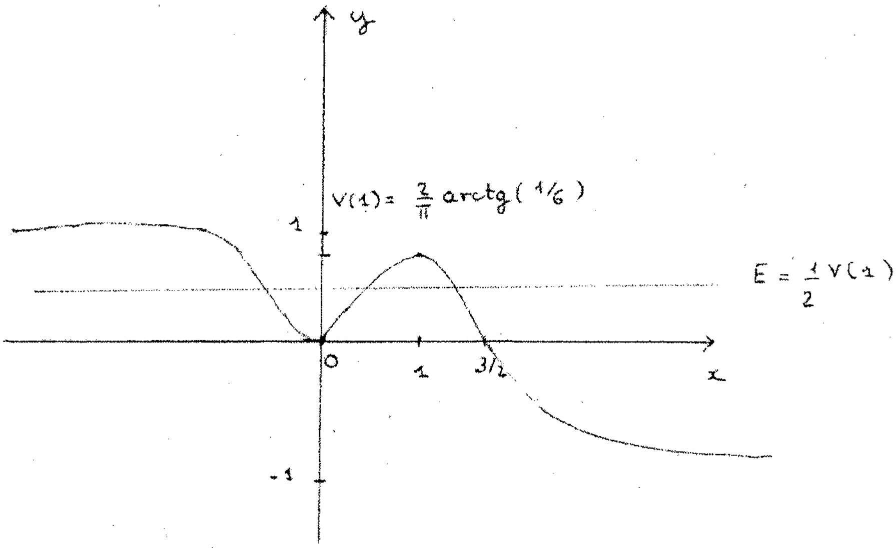
Domanda 2. Rispondere alle seguenti domande:

(*a*) Descrizione di Poinsot del corpo rigido.

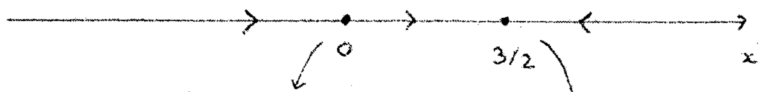
(*b*) Dimostrare che i flussi Hamiltoniani sono trasformazioni canoniche. Di quale valenza?

Soluzione Esercizio 1

(a) Grafico di f.



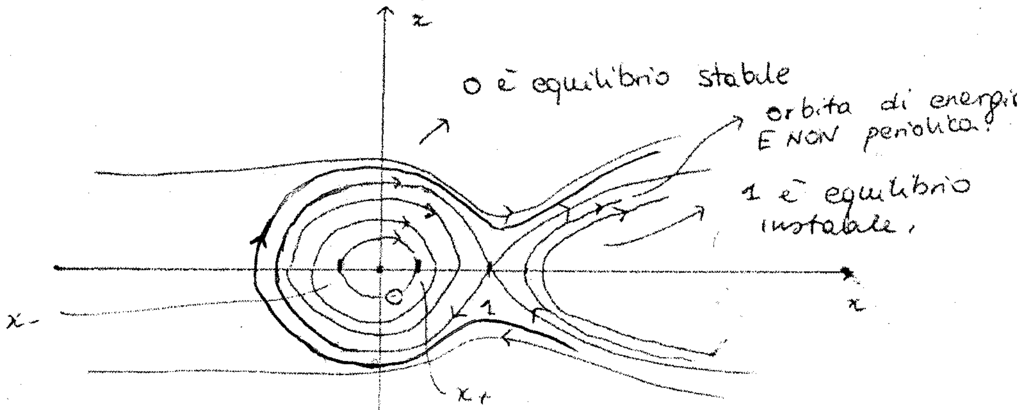
(b)



0 è equilibrio né attrattivo né repulsivo.

3/2 è equilibrio attrattivo.

(c)



(d) Il valore di energia $E = 0$ ha un'orbita periodica (punto fisso).
Il valore di energia $E = V(1)$ ha un'orbita periodica (punto fisso).
Quindi $\mathcal{E} = \mathbb{R} \setminus [0, V(1)]$

(e) $E = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}(1/6) = \frac{1}{2}V(1) \in [0, V(1)] \Rightarrow$ Ammette un'orbita periodica, ma non tutte le orbite di energia E sono periodiche.
Si veda ritratto in fase.

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x))}}\,dx.$$

Esercizio 2 f è integrale primo per X sse $L_X f(x,y) = 0$ sse

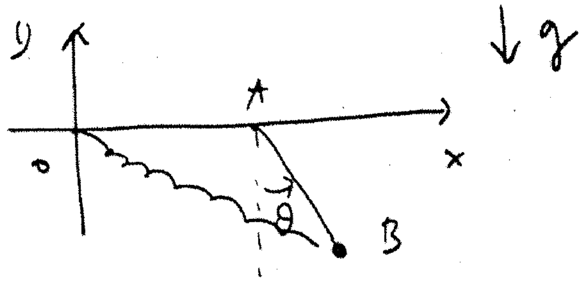
$$\nabla f(x,y)\cdot X(x,y) = 0 \quad \text{sse} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 4y(y^2-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\,4x(x^2-1) = 0$$

Cerco f tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2-1) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y(y^2-1) \end{cases} \quad \text{sse} \quad f(x,y) = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2 + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Fisica Matematica
Appello del 25/6/18.

Correzione esercizio B.



$$U = U(x,\theta) = U^{g} + U^{el} = -mgl\cos\theta + \frac{h}{2}\left(x^2 + l^2 - 2xl\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

$$\cong -mgl\cos\theta + \frac{h}{2}x^2 + hlx\sin\theta$$

Equilibrio:

$$\begin{cases} U_x = hx + hl\sin\theta = 0 \\ U_\theta = mgl\sin\theta + hlx\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta + hx\cos\theta = 0 \\ x + l\sin\theta = 0 \end{cases} \qquad x_{eq} = -l\sin\theta$$

$\sin\theta\,(mg - hl\cos\theta) = 0$ da cui

$\sin\theta = 0$ $\quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi$

$mg = hl\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{mg}{hl} = \lambda \leq 1$

$\theta_{3,4} = \pm\arccos(\lambda)$.

Stabilità

$U_{xx} = h, \quad U_{x\theta} = hl\cos\theta$

$U_{\theta\theta} = mgl\cos\theta - hlx\sin\theta$

$U_{\theta\theta} = mgl\cos\theta - hl\,x\sin\theta$

$U_{\theta\theta}(x_{eq},\theta) = mgl\cos\theta - hl^2\sin^2\theta$

$$H_U(x_{eq},\theta) = \begin{pmatrix} h & hl\cos\theta \\ hl\cos\theta & mgl\cos\theta - hl^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$P = (x\ \theta)$

$$H_U(0,0) = \begin{pmatrix} h & hl \\ hl & mgl \end{pmatrix} \qquad h > 0$$

$\det H_U = h^2 l^2 (\lambda - 1)$

$(0,0)$ è stabile $\iff \lambda < 1$. $\quad (\lambda \neq 1)$

$$H_U(0,\pi) = \begin{pmatrix} h & -hl \\ -hl & -mgl \end{pmatrix}, \quad h > 0$$

$\det H_U(0,\pi) = -mghl - h^2 l^2 < 0$

sempre instabile.

$$H_U(x_{eq},\theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} h & hl\lambda \\ hl\lambda & mgl\lambda - hl^2(1-\lambda^2) \end{pmatrix}, \quad h > 0$$

$\det H_U(x_{eq},\theta_{3,4}) = h^2 l^2 (\lambda^2 - 1)$

$P_{3,4}$ stabile $\iff \lambda < 1$. $\quad (\lambda \neq 1)$

Energia cinetica

$T = \frac{m}{2} v_R^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta})$

$$T = \frac{m}{2} v_B^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot\theta^2 + 2l\cos\theta\,\dot{x}\dot\theta\right)$$

$$A = A(\theta) = \begin{pmatrix} m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2 \end{pmatrix}$$

piccole oscillazioni : $\det\left(H_U(eq) - \omega^2 A(eq)\right) = 0.$

Funzione di Routh:

se $h=0$, $U = U_g = -mgl\cos\theta$

$$L = T - U = T(\dot x, \dot\theta, \theta) - U(\theta).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial T}{\partial \dot x} = m\dot x + ml\cos\theta\,\dot\theta = cm$$

$$\dot x = c - l\cos\theta\,\dot\theta = \hat{\dot x}$$

$$R_c(\theta,\dot\theta) = L(\theta,\dot\theta,\hat{\dot x}) - cm\hat{\dot x}$$

$$= \frac{m}{2}(c - l\cos\theta\,\dot\theta)^2 + \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 + ml\cos\theta\,\dot\theta\,(c - l\cos\theta\,\dot\theta)$$

$$- U(\theta) - cm\,(c - l\cos\theta\,\dot\theta)$$

Trasformazione di Legendre

$$p = \nabla_{\dot q} L \qquad \begin{cases} p_x = \dfrac{\partial L}{\partial \dot x} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot x} \\[2ex] p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot\theta} \end{cases}$$

si ha $\quad p = \begin{pmatrix} p_x \\ \vdots \end{pmatrix} = A(\theta)\begin{pmatrix} \dot x \\ \vdots \end{pmatrix}$

si ha
$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_\theta \end{pmatrix} = A(\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

la mappa $p = \nabla_{\dot{q}} L$ è loc. invertibile se

$\det A(\theta) = m^2 \ell^2 (1 - \cos^2\theta) \neq 0$ quindi per

$\theta \neq 0, \pi$. Per $\theta \neq 0, \pi$ si ha

$$\begin{cases} m > 0 \\ \det A > 0 \end{cases}$$ quindi $A \in \mathrm{Sym}^+$ e la mappa

è globalmente invertibile sui convessi di $\mathbb{R}^2$.