Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
19 agosto 2019 ore 10:00 Aula 1A/150 Torre Archimede

Attenzione: Siete invitati a consegnare DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo –che numerate con 1– risolvete *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 1, sul secondo –numerato con 2– risolvete** *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

1

1.1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-x}\left(x^2 - 1\right)^2 .$$

(i) Si traccino il grafico dell'energia potenziale e il ritratto in fase per il sistema dinamico associato.
(ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico discutendone la stabilità.
(iii) Si verifichi, con calcoli esatti o stime approssimate, che il valore dell'energia potenziale V nel punto di massimo locale ottenuto per $x > 0$ è maggiore di quello nel punto di massimo locale ottenuto per $x < 0$.
(iv) Si determini, ombreggiando il ritratto in fase e specificando in funzione dei punti di equilibrio i corrispondenti valori dell'energia totale, l'insieme dei dati iniziali che generano traiettorie periodiche.
Nello svolgimento si tengano presenti le approssimazioni $\sqrt{5} \approx 2.24$ *ed* $e \approx 2.72$

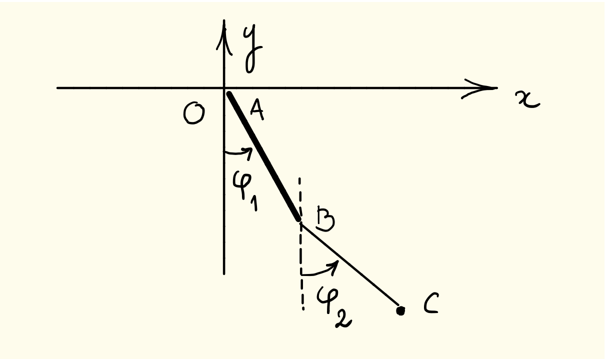
1.2 Si enunci e si dimostri il teorema di Lagrange–Dirichlet.

1.3 Si enunci e si dimostri il teorema di rappresentazione degli operatori antisimmetrici su $\mathcal{E}_3$.

2

2.1 Un'asta rigida AB di massa $6m$ e di lunghezza l è vincolata senza attrito nel piano Oxy con il punto A incernierato nell'origine O. All'estremo B è vincolata una seconda asta BC di massa trascurabile e di lunghezza $\frac{3}{4}l$, nell'estremo C è vincolato un punto di massa m. Sul sistema agisce la gravità e l'asse y è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\hat{y}$. Si introducano le coordinate angolari φ_1 e φ_2 in figura.

(i) Si determinino gli equilibri e se ne studi la stabilità.
(ii) Determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.



2.2 Quali relazioni intercorrono tra i moti spontanei (assenza di forze attive) di un punto materiale vincolato senza attrito su di una superficie e le curve geodetiche su di essa? Spiegare in dettaglio.

2.3 Si consideri la funzione Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \sqrt{\sum_{h,k=1}^{N} a_{hk}(q)\dot{q}^h\dot{q}^k}$$

dove a_{hk} è definita positiva per ogni $q \in \mathbb{R}^N$. Dire se il sistema dinamico Lagrangiano associato ad L ammette formulazione Hamiltoniana coniugata ad esso.

1.1 L'energia potenziale $V(x) \geq 0$ si annulla per $x = \pm 1$ e ammette i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = 0.$$

Calcolando la forza

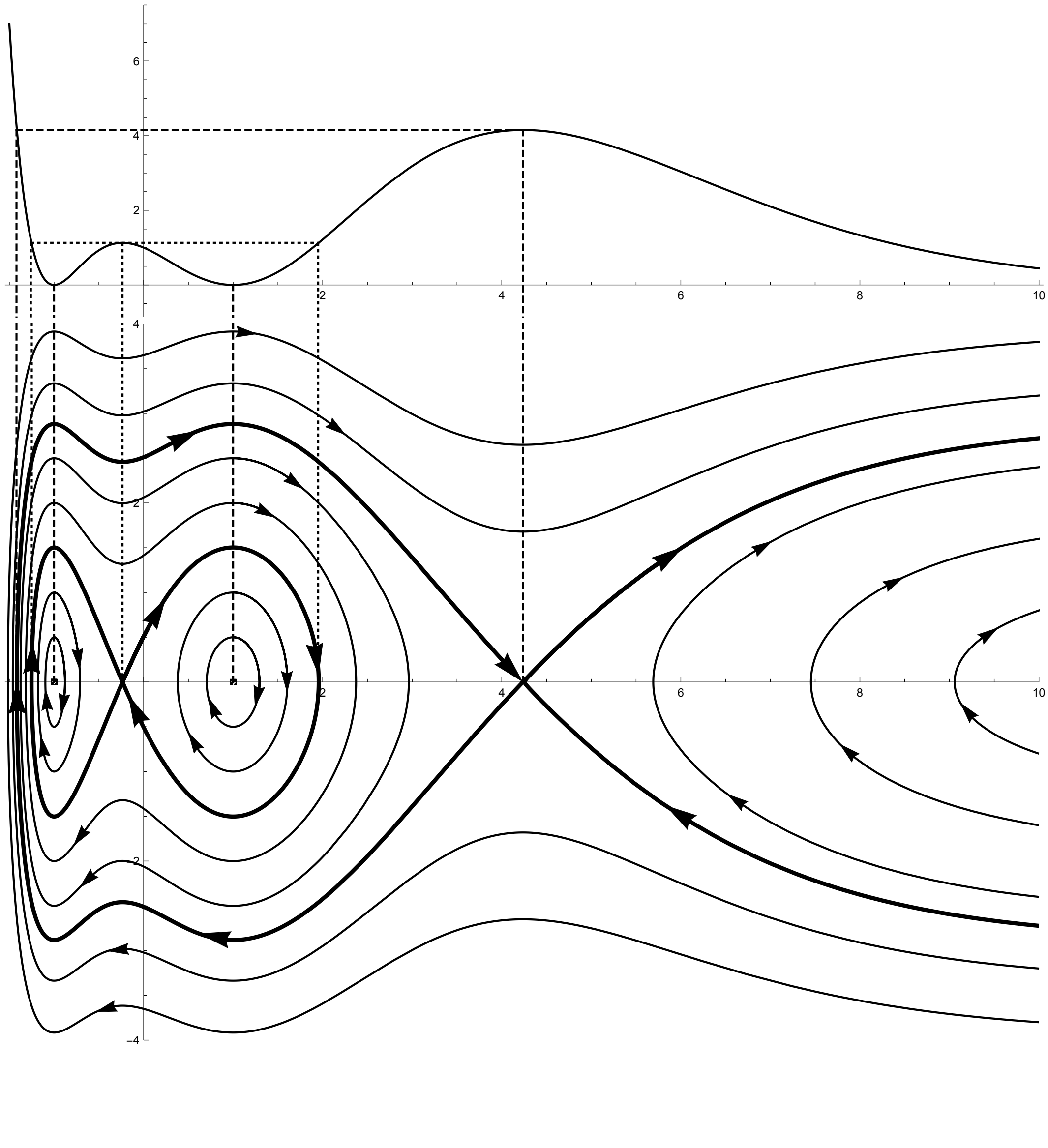
$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = e^{-x}(x-1)(x+1)\left(x^2 - 4x - 1\right)$$

e risolvendo $f(x) = 0$ si identificano i punti di equilibrio $x_1 = -1$, $x_2 = 2 - \sqrt{5}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2 + \sqrt{5}$.

Valutando il segno di $V''(x)$ nei punti di equilibrio, i punti x_1 e x_3 risultano essere minimi locali e quindi punti di equilibrio stabili, mentre x_2 e x_4 sono massimi locali per $V(x)$, quindi equilibri instabili.

Per stabilire che $V(x_2) < V(x_4)$ si può effettuare il calcolo con le approssimazioni indicate oppure, conoscendo il segno di V'', osservare che x_2 è vicino a 0 e x_4 è vicino a 4 e calcolare $V(0) = 1$ e $V(4) = 225/e^4 \approx 225/53 \approx 4.2$.

I valori dell'energia totale associati ad orbite periodiche non degeneri sono dati dagli intervalli $]V(x_1) = 0, V(x_2)[$ e $]V(x_2), V(x_4)[$. Va quindi ombreggiata la regione interna alla separatrice uscente da $(x_4, 0)$ con x_4.



2.1

$$\mathcal{U}(\varphi_1, \varphi_2) = -4mgl\cos\varphi_1 - \frac{3}{4}mgl\cos\varphi_2$$

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi_1} &= 4mgl\sin\varphi_1 \\ 0 = \tfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi_2} &= \tfrac{3}{4}mgl\sin\varphi_2 \end{aligned}$$

Equilibri: $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$.

$$\nabla^2\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 4mgl\cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}mgl\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Solamente $(0,0)$ è stabile.

$$T = \frac{1}{2}(\frac{(6m)l^2}{3})\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}|v_C|^2 = ml^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot\varphi_1^2 + \frac{9}{16}l^2\dot\varphi_2^2 + \frac{3}{2}l^2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2)$$

$$a(\varphi_1,\varphi_2) = ml\begin{pmatrix} 3l & \frac{3}{4}l\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ \frac{3}{4}l\cos(\varphi_1-\varphi_2) & \frac{9}{16}l \end{pmatrix}$$

$$0 = \det ml\left[\begin{pmatrix} 4g & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}g \end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix} 3l & \frac{3}{4}l \\ \frac{3}{4}l & \frac{9}{16}l \end{pmatrix}\right]$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

2.2 Vedi dispensa.
2.3 Si ha che $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q \partial \dot q} = 0$: non è possibile def. la tr. di Legendre.