UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
23 LUGLIO 2019 ORE 9:30 AULA 1A/150 TORRE ARCHIMEDE

Attenzione: Siete invitati a consegnare DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo –che numerate con 1– risolvete *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 1, sul secondo –numerato con 2– risolvete** *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

1

1.1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \left(\sin^2 x - \frac{3}{2}\right)\sin x.$$

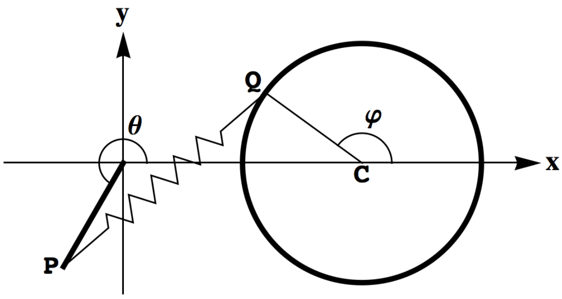
(i) Si traccino il grafico dell'energia potenziale e il ritratto in fase per il sistema dinamico associato. A motivo della periodicità dell'energia potenziale, si utilizzi la regione per x compresa tra $-\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{5}{4}\pi$.
(ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico discutendone la stabilità.
(iii) Si determini l'intervallo di valori dell'energia totale del sistema per cui si hanno traiettorie periodiche.
(iv) Si scriva, senza svolgere l'integrale definito ma specificando i valori di tutti i parametri, la formula del periodo dell'orbita di energia totale pari a zero.

1.2(i) Scrivere l'enunciato (formulazione topologica, C^0) del teorema della funzione di Lyapunov per la stabilità semplice di un equilibrio x^* di un sistema dinamico astratto $\dot{x} = X(x)$ e dimostrarlo in dettaglio.
(ii) Spiegare come si utilizza questo teorema nel caso meccanico a vincoli olonomi, fissi, lisci e con opportune (quali?) Componenti Lagrangiane di Sollecitazione.

1.3 Derivare le formule di Galileo e di Coriolis che mettono in relazione, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione viste in un sistema di riferimento $T^a = (O^*, e_i^*)$ solidale con uno spazio inerziale con quelle viste in un sistema di riferimento $T^r = (O, e_i)$ in moto relativo rispetto al primo con velocità angolare di trascinamento ω^τ.

2

2.1 *Un'asta omogenea OP di lunghezza ℓ e di massa m è attaccata all'origine di un sistema di riferimento Oxy, con y verticale ascendente (agisce quindi la gravità). All'estremità libera dell'asta (nel punto P) è attaccata una molla di costante elastica k il cui altro capo è attaccato ad un punto Q di un anello omogeneo di massa M, raggio ℓ, e centro $C = (2\ell, 0)$. Scegliendo come coordinate Lagrangiane ϑ, angolo formato dal semiasse positivo delle x con l'asta OP e valutato in senso antiorario e φ, angolo formato dal semiasse positivo delle x con il segmento CQ e valutato in senso antiorario,*
a. *determinare il valore di k affinchè la configurazione $\vartheta = \frac{5}{3}\pi$, $\varphi = \frac{7}{6}\pi$ sia di equilibrio;*
b. *per quel particolare valore di k discutere la stabilità dell'equilibrio di cui al punto* **a**;
c. *per quel particolare valore di k, determinare le frequenze di piccole oscillazioni attorno all'equilibrio in questione.*



2.2 Enunciare e dimostrare il Principio Variazionale di Hamilton.

2.3 (i) (Equ. di Hamilton) Sia $H : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$, $(q, p) \mapsto H(q, p)$, una funzione di classe C^2. Si può affermare a priori che il problema iniziale di Cauchy per le associate equazioni di Hamilton con H come sopra sia 'ben posto', cioè con esistenza e unicità locale della soluzione, per generico punto iniziale $(q(0), p(0))$ al tempo $t = 0$?
(ii) Tali equazioni di Hamilton possono ammettere equilibri asintoticamente stabili?
(iii) (Trasf. Canoniche) Sia $\tilde{q} = Rq$, con $R^T R = \mathbb{I}$. Estendere questa trasformazione di $\mathbb{R}^N$ in sè ad una trasformazione di $\mathbb{R}^{2N}$ in sè tale che $(\tilde{q} = Rq,\ \tilde{p} = f(q, p))$ sia una trasformazione canonica.

1.1 L'energia potenziale $V(x)$ è periodica di periodo 2π. Calcolando la forza

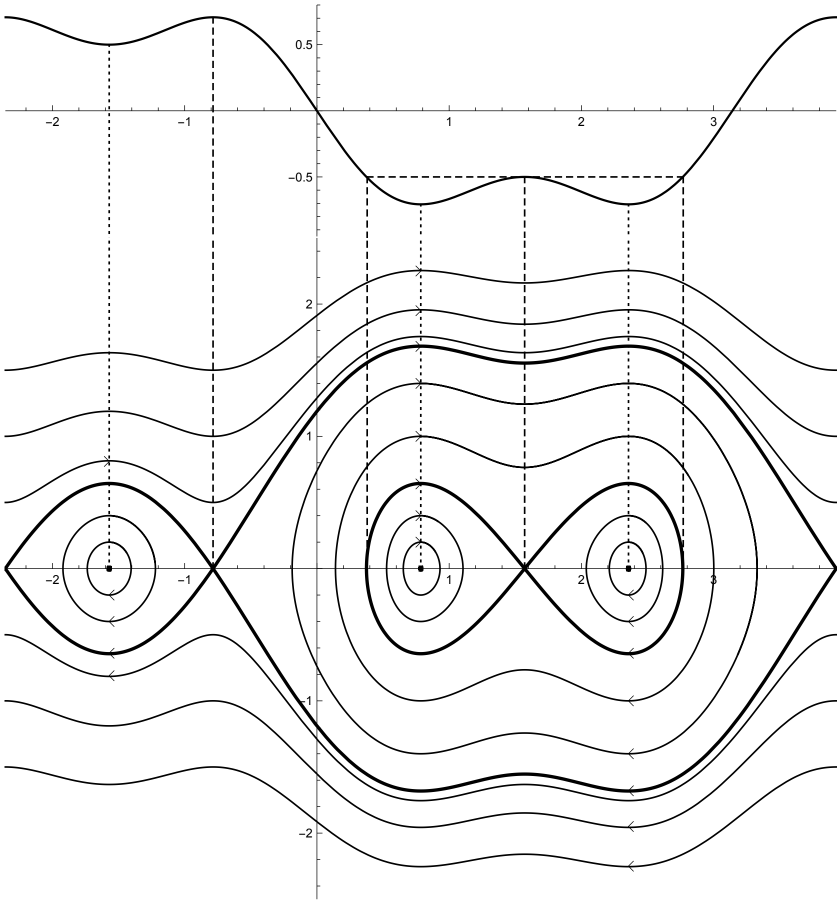
$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{3}{2}\big(2\sin^2 x - 1\big)\cos x$$

e risolvendo $f(x) = 0$ si identificano, nell'intervallo semiaperto $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi[$, i punti di equilibrio $x_1 = -\frac{3}{4}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{2}\pi$, $x_3 = -\frac{1}{4}\pi$, $x_4 = \frac{1}{4}\pi$, $x_5 = \frac{1}{2}\pi$ e $x_6 = \frac{3}{4}\pi$.

Valutando il segno di $V''(x)$ nei punti di equilibrio, i punti x_1, x_3 e x_5 risultano essere massimi locali per $V(x)$, quindi equilibri instabili, mentre x_2, x_4 e x_6 sono minimi locale e quindi punti di equilibrio stabili.

I valori dell'energia totale associati ad orbite periodiche non degeneri sono dati dall'intervallo $]V(x_4), V(x_1)[$, che corrisponde a $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$.

Il periodo dell'orbita di energia totale pari a zero è dato da $T = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{-2V(x)}}$.



1.2 cf. dispensa p. 81 e ss.
1.3 cf. dispensa pp. 241–242

Ricordiamo che il momento di inerzia di un anello rispetto al centro è $M\ell^2$ mentre quello di un'asta rispetto ad un suo estremo è $m\ell^2/3$.

a. Le posizioni dei punti rilevanti per il sistema sono $OG = \frac{\ell}{2}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ (G è il baricentro dell'asta), $OP = \ell(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $OQ = \ell(2 + \cos\varphi, \sin\varphi)$. Il potenziale associato al sistema è

$$V(\vartheta,\varphi) = V_G^g + V_{PQ}^k = \\ = mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta + \frac{k}{2}\Big((2\ell + \ell\cos\varphi - \ell\cos\vartheta)^2 + (\ell\sin\varphi - \ell\sin\vartheta)^2\Big) \\ \simeq mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta + k\ell^2(2\cos\varphi - 2\cos\vartheta - \cos(\vartheta-\varphi)).$$

Per rispondere alla domanda si deve calcolare il gradiente di V, che è

$$\nabla V(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{mg\ell}{2}\cos\vartheta + k\ell^2(2\sin\vartheta + \sin(\vartheta-\varphi)) \\ k\ell^2(-2\sin\varphi - \sin(\vartheta-\varphi)) \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che valore deve avere k perchè il gradiente sia nullo in $(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi)$. La seconda riga è zero se

$$0 = 2\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

(sempre vera), la prima riga invece porge la relazione

$$\frac{mg\ell}{2}\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + k\ell^2\left(2\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{mg\ell}{4} + k\ell^2\left(-\sqrt{3}+1\right),$$

che porge $k = \frac{gm}{4(\sqrt{3}-1)\ell}$.

b. Per studiare la stabilità si controlla l'Hessiana del potenziale V.

$$HessV = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\ell(-4k\ell\cos(\theta) - 2k\ell\cos(\theta-\varphi) + gm\sin(\theta)) & -k\ell^2\cos(\theta-\varphi) \\ -k\ell^2\cos(\theta-\varphi) & -\frac{1}{2}\ell(4k\ell\cos(\varphi) - 2k\ell\cos(\theta-\varphi)) \end{pmatrix}$$

Calcolato nell'equilibrio si ha che $HessV(\frac{5}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi) = mg\ell\begin{pmatrix} \frac{(4-\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-1)} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-1)} \end{pmatrix}$. Quindi l'equilibrio è stabile dal momento che tutti i numeri nella diagonale sono positivi h_1, h_2.

c. La matrice Hessiana di V è diagonale, per scrivere la matrice cinetica bisogna calcolare l'energia cinetica, che è la somma dell'energia cinetica di asta e disco. La velocità angolare dell'asta è $\dot\vartheta e_z$, e quindi la sua energia cinetica è

$$\frac{1}{2}\dot\vartheta^2\, e_z\cdot\mathcal{I}_G e_z + \frac{1}{2}m|v_G|^2 = \frac{1}{2}\dot\vartheta^2\cdot\mathcal{I}_G + \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{4}\dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot\vartheta^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\dot\vartheta^2\frac{m\ell^2}{3}.$$

(L'energia cinetica poteva anche calcolarsi relativamente al punto O.) Per l'anello, un conto analogo porge $\frac{1}{2}M\ell^2\dot\varphi^2$. Si ha quindi che la matrice cinetica del sistema è $A = \begin{pmatrix} m\ell^2/3 & 0 \\ 0 & M\ell^2 \end{pmatrix}$, che è pure essa diagonale con entrate a_1, a_2. La trattazione delle piccole oscillazioni per questo problema si rivela essere triviale, e porge come modi normali le oscillazioni indipendenti di asta e disco con frequenze $\sqrt{h_1/a_1}$ e $\sqrt{h_2/a_2}$. □

2.3 (*i*) Si, il campo vett. Hamiltoniano risulta dunque di classe C^1, vale il teorema di Cauchy, ove basta Lipschitz. (*ii*) Non possono esistere equ. asint. stabili perche H è un integrale primo. Infine, se H fosse banalmente una costante, allora tutti i punti di $\mathbb{R}^{2N}$ sarebbero equilibri e si conclude ancora nello stesso modo.

(*iii*) Si puo' usare $J\mathbb{E}J^T = c\mathbb{E}$ e cercando tra le f lineari si trova $\tilde p = Rp$ per $c = 1$.
Piu' rapidamemte, si puo' osservare che le trasformazioni nel cotangente ereditate da una trasformazione nella varieta' base sono trasformazioni canoniche per $c = 1$, dunque si ritrova: $\tilde p = R^{-T}p = Rp$.