FISICA MATEMATICA - 8 luglio 2014 - Corso di Laurea in Matematica

Attenzione: Riconsegnate TRE fogli (protocollo a 4 facciate) su cui sono separatamente svolti i quesiti 1, 2 e 3, con cognome e nome e con il numero messo in evidenza. Niente brutte copie. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Sia $f(x) = x^2(x-2)$.
a. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -f'(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Tracciare il ritratto in fase. Stabilire per quali valori del parametro $v \in \mathbb{R}$ la soluzione con dato iniziale $x(0) = \frac{4}{3}$, $\dot{x}(0) = v$ è periodica (suggerimento: si scriva una condizione che coinvolga l'energia).
b. Si consideri l'equazione differenziale

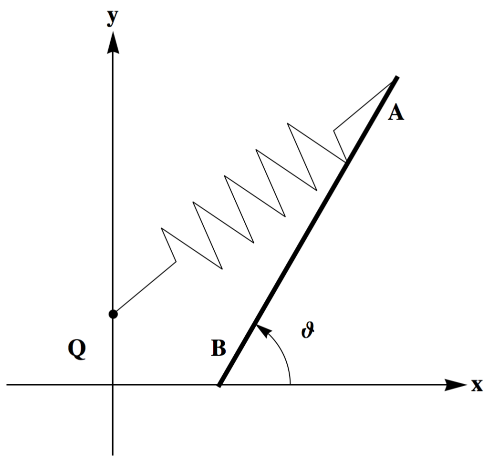
$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Tracciare il ritratto in fase, indicando la natura degli equilibri.

1.2 Cos'è un sistema lineare? Come si calcola il suo flusso?

2

2.1 In un sistema di riferimento Oxy con y verticale ascendente, un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza ℓ ha estremo B vincolato sull'asse delle x. All'estremo A dell'asta è fissata una molla di costante elastica k il cui altro estremo è fissato ad una particella materiale Q anche essa di massa m vincolata a scorrere sull'asse delle y. Sul sistema agisce la gravità $\mathbf{g} = -g\mathbf{e_y}$.
a. Si scriva la Lagrangiana del sistema.
b. Si determinino gli equilibri del sistema.
c. Si studi la stabilità dei due equilibri ottenuti.
d. Si determini una delle frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile.



2.2 Dato un sistema di riferimento fisso (O^*, e_i^*) ed un sistema di riferimento $(O = O^*, e_i)$ rotante con velocità angolare costante ω, si scriva l'accelerazione assoluta di una particella come funzione della accelerazione relativa ed altri due termini (Formula di Coriolis... semplificata). Che nome hanno i termini che compaiono nella formula?

3

3.1 Data la Lagrangiana del problema dei due corpi piano

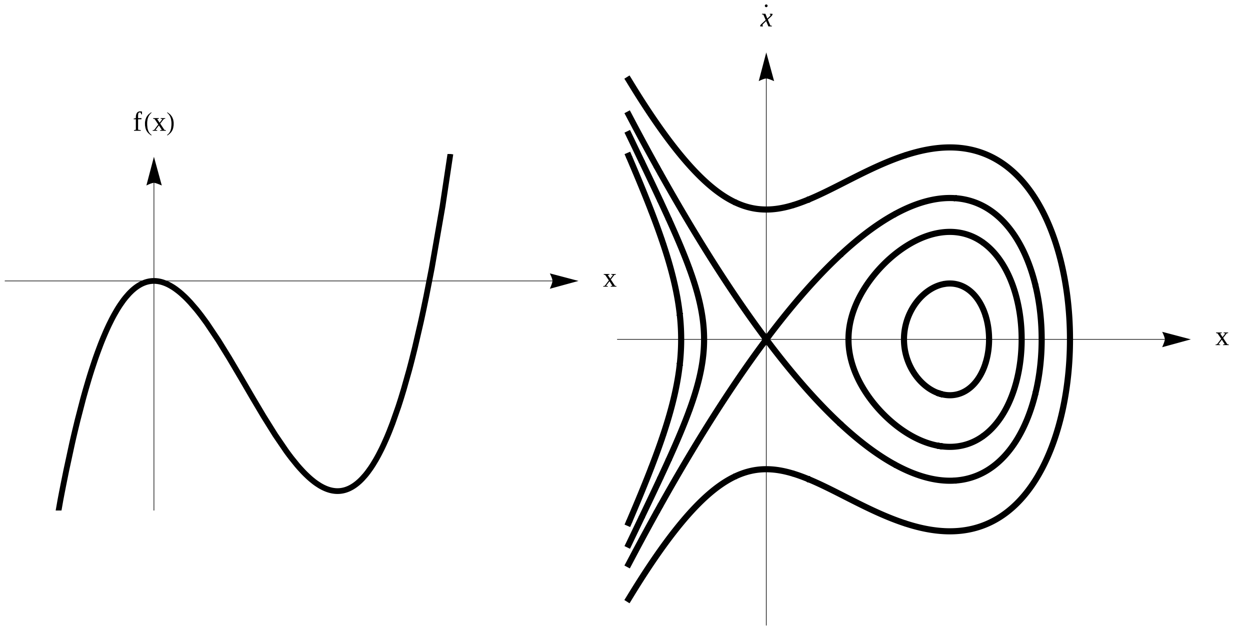
$$L(x_s, y_s, x_p, y_p, \dot{x}_s, \dot{y}_s, \dot{x}_p, \dot{y}_p) = \frac{1}{2}M(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{k}{\sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2}}.$$

Si usi il cambiamento di coordinate $x = x_s - x_p$, $y = y_s - y_p$, $X = (Mx_s + mx_p)/(M+m)$, $Y = (My_s + my_p)/(M+m)$, per riscrivere la Lagrangiana e si riduca la Lagrangiana così ottenuta rispetto alle sue due variabili cicliche. Che interpretazione meccanica si può dare alla Lagrangiana ridotta?

3.2 Si ricordi che una funzione f è integrale primo del sistema Hamiltoniano X_H se e solo se $\{f, H\} = 0$. Dimostrare che se f, g sono integrali primi per X_H allora $\{f, g\}$ è integrale primo per X_H. Dedurre che se un sistema Hamiltoniano in $T^*\mathbb{R}^3$ con coordinate canoniche x, y, z, p_x, p_y, p_z ha come integrali primi le funzioni $xp_y - yp_x$ e $yp_z - zp_y$ allora necessariamente ammette anche l'integrale primo $xp_z - zp_x$.

Soluzione all'esercizio 1.1

a. Il ritratto in fase è



Il valore critico dell'energia che separa la regione con orbite limitate (e quindi periodiche) da quelle illimitate è $E(x, \dot{x}) = 0$, quindi l'intervallo delle $\dot{x}$ alle quali corrispondono orbite periodiche sono le $\dot{x}$ tali che $E(\frac{4}{3}, \dot{x}) < 0$, ovvero $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{16}{9}\left(\frac{4}{3} - 2\right) < 0$, che diventa $|\dot{x}| < \frac{8}{3\sqrt{3}}$

b. Il secondo sistema non ha niente a che vedere con il primo. Il flusso è definito sulla retta reale, ha due equilibri in corrispondenza dei due zeri della funzione $x = 0, 2$, il primo equilibrio non è né attrattivo né repulsivo (attrattivo invertendo il tempo) mentre il secondo è repulsivo.

Soluzione all'esercizio 2.1

a. L'energia cinetica è la somma dell'energia cinetica del punto materiale Q del centro di massa dell'asta AB e del moto relativo dell'asta attorno al suo centro di massa:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x} - \dot{\vartheta}\,\frac{\ell}{2}\sin\vartheta\right)^2 + \left(\dot{\vartheta}\,\frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot{\vartheta}^2 =$$

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\vartheta}^2\,\frac{\ell^2}{4} - \dot{x}\dot{\vartheta}\ell\sin\vartheta\right) + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot{\vartheta}^2$$

La matrice dell'energia cinetica è quindi

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & -\frac{m\ell}{2}\sin\vartheta \\ 0 & m & 0 \\ -\frac{m\ell}{2}\sin\vartheta & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}$$

L'energia potenziale è invece la somma del potenziale gravitazionale del punto Q, del potenziale gravitazionale della sbarra, e del potenziale elastico della molla:

$$V = mgy + mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + 2\ell(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)).$$

La Lagrangiana è $L = T - V$.

b. Gli equilibri sono i punti critici dell'energia potenziale. Il gradiente di V è

$$\nabla V = \begin{pmatrix} kx + k\ell\cos\vartheta \\ ky - k\ell\sin\vartheta + mg \\ mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta - k\ell(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta) \end{pmatrix},$$

da cui si ricava che $x = -\ell\cos\vartheta$, $y = \ell\sin\vartheta - mg/k$ e quindi

$$0 = -mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta.$$

Si hanno quindi le due soluzioni

$$x = 0, y = -\ell - \frac{gm}{k}, \vartheta = \frac{3}{2}\pi$$

$$x = 0, y = \ell - \frac{gm}{k}, \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

c. La matrice Hessiana dell'energia potenziale è

$$HV(x, y, \vartheta) = \begin{pmatrix} k & 0 & -k\ell\sin\vartheta \\ 0 & k & 0 \\ -k\ell\sin\vartheta & 0 & -mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta - k\ell(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Valutata nel primo equilibrio si ottiene la matrice

$$HV(0, -\ell - \frac{gm}{k}, \frac{3}{2}\pi) = \begin{pmatrix} k & 0 & k\ell \\ 0 & k & 0 \\ k\ell & 0 & k\ell^2 + \frac{3}{2}gm\ell \end{pmatrix}$$

che è definita positiva (basta controllare il determinante, visto che si vedono immediatamente i minori principali positivi) e quindi dimostra, per il teorema di Lagrange-Dirichelet (od anche per il teorema dell'Hessiana non degenere) la stabilità del primo equilibrio mentre invece

$$HV(0, \ell - \frac{gm}{k}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & 0 & -k\ell \\ 0 & k & 0 \\ -k\ell & 0 & k\ell^2 - \frac{3}{2}gm\ell \end{pmatrix}$$

che ha un autovalore negativo (in questo caso il determinante è negativo) e quindi dimostra l'instabilità del secondo equilibrio per il teorema dell'Hessiana non degenere.

d. Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni all'equazione

$$\det\left(\begin{pmatrix} k & 0 & k\ell \\ 0 & k & 0 \\ k\ell & 0 & k\ell^2 + \frac{3}{2}gm\ell \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 & \frac{m\ell}{2} \\ 0 & m & 0 \\ \frac{m\ell}{2} & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}\right) = 0$$

da cui si ricava che una delle soluzioni è $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (le altre due soluzioni hanno espressioni più complicate).

Soluzione all'esercizio 3.1

Il cambiamento di coordinate inverso è

$$\begin{cases} x_s = X + \frac{m}{M+m}x \\ x_p = X - \frac{M}{M+m}x \\ y_s = Y + \frac{m}{M+m}y \\ y_p = Y - \frac{M}{M+m}y \end{cases}$$

da cui si ottiene che

$$L(x,y,X,Y,\dot x,\dot y,\dot X,\dot Y) = \frac{1}{2}M\left(\left(\dot X + \frac{m}{M+m}\dot x\right)^2 + \left(\dot Y + \frac{m}{M+m}\dot y\right)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{2}m\left(\left(\dot X - \frac{m}{M+m}\dot x\right)^2 + \left(\dot Y - \frac{m}{M+m}\dot y\right)^2\right) + \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(\dot x^2+\dot y^2) + \frac{1}{2}(M+m)(\dot X^2+\dot Y^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Riducendo si ottiene, a meno di una costante, la Lagrangiana

$$L(x,y,X,Y,\dot x,\dot y,\dot X,\dot Y) = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(\dot x^2+\dot y^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

che è la Lagrangiana di una particella di massa $Mm/(M+m)$ in un campo centrale con potenziale proporzionale all'inverso della distanza dal centro.

Soluzione all'esercizio 3.2

Il primo fatto è conseguenza diretta dell'identità di Jacobi

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0.$$

Il secondo fatto segue dal conto

$$\{xp_y - yp_x, yp_z - zp_y\} = (p_y, -p_x, 0, -y, x, 0)\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_3 \\ -\mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \\ 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} = (p_y, -p_x, 0, -y, x, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \\ -0 \\ -p_z \\ p_y \end{pmatrix} = zp_x - xp_z.$$