Attenzione: Siete invitati a consegnare DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo –che numerate con 1– risolvete *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 1, sul secondo –numerato con 2– risolvete** *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

1

1.1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2.$$

(i) Si traccino il grafico dell'energia potenziale e il ritratto in fase per il sistema dinamico associato.
(ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico discutendone la stabilità.
(iii) Si determini, ombreggiando il ritratto in fase e specificando i corrispondenti valori dell'energia totale, l'insieme dei dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

1.2 Scrivere le definizioni di equilibrio stabile e di equilibrio asintoticamente stabile. Enunciare il primo metodo di Lyapunov, o metodo spettrale, per la stabilità degli equilibri di $\dot{x} = X(x)$.

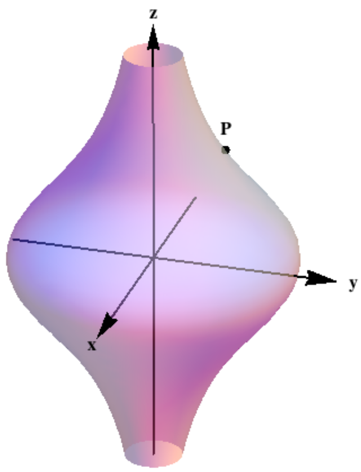
1.3 Considerando gli equilibri dei sistemi meccanici Lagrangiani conservativi, enunciare e dimostrare il Teorema dell'Hessiano Non Degenere in tutta generalità nel caso N-dimensionale.

1.4 Descrivere il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione delle Reazioni Vincolari per i sistemi olonomi (per esempio, con vincoli dati da zeri di funzioni) e senza attrito (lisci). Se si ritiene che sia una semplificazione, trattare il caso di un solo punto materiale vincolato.

2

2.1 Un punto materiale P di massa $m = 1$ è vincolato senza attrito sulla superficie di rivoluzione di equazioni parametriche

$$x = \frac{1}{1+s^2}\cos\varphi, \quad y = \frac{1}{1+s^2}\sin\varphi, \quad z = s$$



$(s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{S}^1)$. Sul punto non agiscono forze attive.
a. Scrivere la Lagrangiana, usando le coordinate s, φ. Dimostrare o confutare che esistano soluzioni che abbiano come sostegno/supporto l'equatore di tale superficie.
b. Scrivere la Lagrangiana del sistema ridotto (alla Routh) per il generico valore c del momento conservato.
c. Abbozzare il ritratto in fase per il sistema ridotto per $c \neq 0$.
d. Assumendo $c \neq 0$, calcolare le frequenze di piccola oscillazione attorno all'equilibrio stabile del sistema ridotto.

2.2 Teorema di Noether, enunciato e dimostrazione.

2.3 Dimostrare che se due campi vettoriali lineari, $X(x) = Ax$ e $Y(x) = Bx, x \in \mathbb{R}^m$, commutano secondo le parentesi di Lie, allora e solo allora i loro flussi commutano: $e^{At}e^{Bs} = e^{Bs}e^{At}$.

Traccia delle soluzioni della parte 1

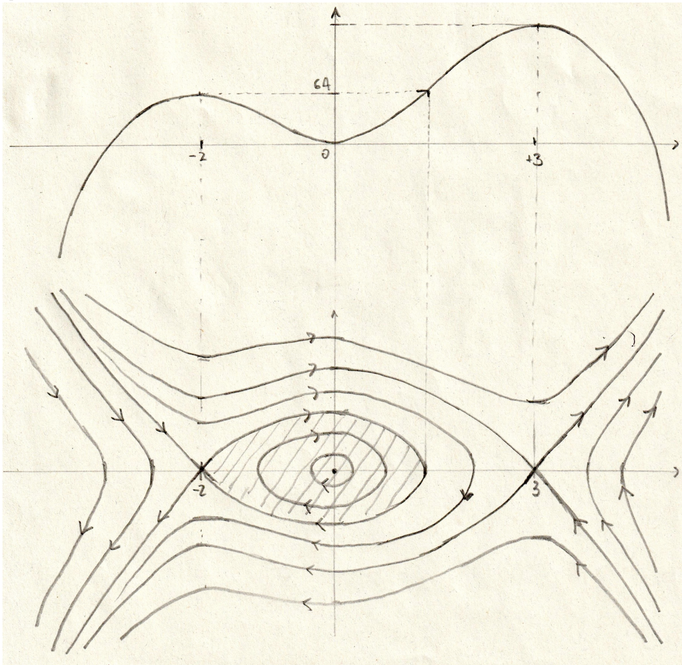
Per $x \to \pm\infty$, l'energia potenziale $V(x)$ tende a $-\infty$ come $-x^4$, generando una forza repulsiva crescente in entrambe le regioni esterne ai massimi dell'energia potenziale. Calcolando la forza

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = -12x(x-3)(x+2)$$

e risolvendo $f(x) = 0$ si identificano i tre punti di equilibrio $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 3$.

Valutando $f'(x) = -12\left(3x^2 - 2x - 6\right)$, i punti x_1 e x_3 risultano essere massimi locali per $V(x)$, quindi equilibri instabili; mentre x_2 è minimo locale e quindi punto di equilibrio stabile.

I valori dell'energia totale associati ad orbite periodiche sono dati dall'intervallo $[V(x_2), \min\{V(x_1), V(x_3)\}]$, che corrisponde a $[0, \min\{64, 189\}]$.



1.3 La traccia per la dimostrazione che nel caso la matrice Hessiana sia iperbolica allora si ha l'instabilità, è indicata a p. 248 della dispensa.

Traccia delle soluzioni della parte 2

2.1 La Lagrangiana è l'energia cinetica:

$$L(s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right)\dot{s}^2 + \left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)\dot{\varphi}^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\dot{\varphi}}{(1+s^2)^2} = c, \quad \dot{\varphi} = c(1+s^2)^2$$

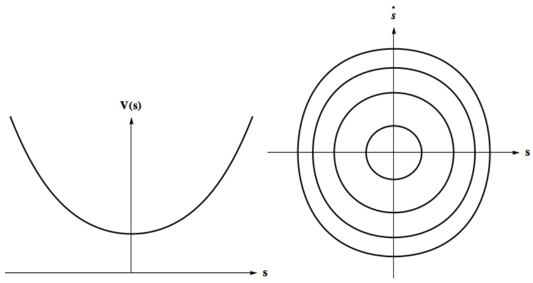
Il teorema di Clairaut afferma che $r \sin\alpha = cost.$, pertanto, se il punto iniziale è sull'equatore $r(0) = r_{equat.} = 1$ e se la velocità iniziale è tangente all'equatore $\alpha(0) = \pi/2$, allora $r(t) \geq r(0)\sin\alpha(0)$, cioè: $r(t) \equiv r_{equat.}$.
La Lagrangiana ridotta:

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}; c) = \left(L(s, \varphi, \dot{s}, \dot{\varphi}) - c\dot{\varphi}\right)\big|_{\dot{\varphi}=c(1+s^2)^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right)\dot{s}^2 - \frac{1}{2}c^2(1+s^2)^2$$

È un sistema 1-dim di cui

$$T(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4s^2}{(1+s^2)^4}\right)\dot{s}^2 \ : \ \text{energia cinetica}$$

$$V(s) = \frac{1}{2}c^2(1+s^2)^2 \ : \ \text{energia potenziale}$$



L'energia cinetica e potenziale del sistema linearizzato attorno all'equilibrio stabile $s = 0$:

$$T^{(0)}(\dot{s}) = T(0, \dot{s}) = \frac{1}{2}\dot{s}^2, \quad V^{(0)}(s) = \frac{1}{2}V^{''}(0)s^2 = \frac{1}{2}(2c^2)s^2$$

$$0 = \det(V^{''}(0) - \omega^2 a(0)) = (2c^2 - \omega^2) \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{2}c$$