

Algebra e Geometria 2 - Giovanna Carnovale
Prima prova parziale - 12 maggio 2006 - Tema A

1. Sia $V = M_{nn}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali e sia E una matrice fissata di V .

(a) Dimostrare che l'insieme

$$W = \{B \in V \mid BE = EB\}$$

è un sottospazio vettoriale di V .

- (b) Siano $n = 2$ ed $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Come deve essere fatto un elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di V per appartenere a W ?
- (c) Determinare una base e la dimensione di W nel caso in cui $n = 2$ ed $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (d) Cosa succede se invece $E = I$, la matrice identità?

2. (a) Determinare per quali valori del parametro μ i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mu \\ 6 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} \mu - 1 \\ \mu \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- (b) Estrarre, dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base per il sottospazio $W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ al variare del parametro μ .
- (c) Dire come cambia la dimensione del sottospazio W generato da v_1, v_2, v_3 al variare del parametro μ .
- (d) Sia $\mu = 0$. Determinare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ rispetto a $\{v_1, v_2, v_3\}$

CONTINUA

3. Determinare matrici P, L, D, U per la fattorizzazione di Gauss della matrice invertibile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Giustificare brevemente per quale motivo i seguenti insiemi di vettori non sono una base del sottospazio vettoriale W indicato:

- (a) $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2+i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ in $W = \mathbb{C}^3$,
 (b) $\{v_1, v_2, v_1 - v_2\}$ in $W = \mathbb{R}^3$;
 (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$.

5. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

e sia

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Determinare la dimensione ed una base per U e per W ;
 (b) Determinare la dimensione ed una base per $U + W$;
 (c) Determinare la dimensione ed una base per $U \cap W$.
 (d) Si dica, motivando la risposta, se U e W decompongono $\mathbb{R}^3$ in somma diretta.