

Algebra e Geometria 2 - Giovanna Carnovale
Seconda prova parziale - 15 giugno 2006 - Tema A

1. Giustificare brevemente per quale motivo la matrice A non è diagonalizzabile sul campo K assegnato.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, su $K = \mathbb{R}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, su $K = \mathbb{C}$.

2. Siano $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ due applicazioni lineari.

(a) Dimostrare che l'applicazione $S \circ T$ definita da $S \circ T(X) = S(T(X))$ per ogni colonna X di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare.

(b) Sia A_T la matrice associata a T rispetto alla base canonica e sia A_S la matrice associata a S rispetto alla base canonica. Come è fatta la matrice associata ad $S \circ T$ rispetto alla base canonica?

3. Sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo T_t da V in V definito da

$$T_t(1) = 1; \quad T_t(x) = x + x^2; \quad T_t(x^2) = (t-1)x + x^2; \quad T_t(x^3) = x^2 + x^3$$

(a) Determinare la matrice A_t associata a T_t rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di V .

(b) Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione T_t risulta iniettiva e per quali risulta suriettiva.

(c) Determinare per quali valori del parametro t l'applicazione T_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(d) Sia $t = 2$. Determinare una base di V formata da autovettori di T_2 e determinare la matrice associata a T_2 rispetto alla base trovata.

CONTINUA

4. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4 dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare una base ortonormale di V .
- (b) Determinare la proiezione del vettore $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ su V .
- (c) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ contenente la base trovata nel punto (a).
5. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Si consideri la trasformazione lineare $T: V \rightarrow V$ definita da

$$T(v_1) = v_1 + v_3; \quad T(v_2) = v_1 + v_2; \quad T(v_3) = v_3$$

- (a) Determinare la matrice A_v associata a T rispetto alla base $\mathbf{v}$.
- (b) Sia data la base $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ di V formata dai vettori

$$w_1 = v_2 + v_3, \quad w_2 = v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2.$$

Determinare la matrice M_{wv} del cambiamento di base dalla base $\mathbf{w}$ alla base $\mathbf{v}$.

- (c) Determinare la matrice M_{vw} del cambiamento di base dalla base $\mathbf{v}$ alla base $\mathbf{w}$. Che relazione c'è tra M_{vw} ed M_{wv} ?
- (d) Determinare la matrice A_w associata a T rispetto alla base $\mathbf{w}$. Che relazione c'è tra A_v ed A_w ?