Algebra e Geometria 2 per Informatica
Primo Appello
23 giugno 2006
Tema A

1. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia
$$W = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\right\}$$
il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche e sia
$$U = \left\{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid B^T = -B\right\}.$$

   (a) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
   L'insieme U è non vuoto perché la matrice nulla 0 soddisfa la condizione $O^T = -0 = 0$.
   Se B e $C \in U$ allora $B^T = -B$ e $C^T = -C$. Allora
   $$(B+C)^T = B^T + C^T = -B - C = -(B+C)$$
   dove per la prima uguaglianza abbiamo usato le proprietà della trasposta, per la seconda abbiamo usato che B e C appartengono ad U e per la terza abbiamo usato le proprietà della somma tra matrici. Ne segue che $B + C \in U$.
   Se $B \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora
   $$(\lambda B)^T = \lambda B^T = -\lambda B$$
   dove per la prima uguaglianza abbiamo usato le proprietà della trasposta, per la seconda abbiamo usato che B appartiene ad U e per la terza abbiamo usato le proprietà del prodotto di matrici per uno scalare. Ne segue che $\lambda B \in U$, quindi U è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto ed è quindi un sottospazio vettoriale.

   (b) Determinare una base per U ed una base per W. Motivare la risposta.
   Le matrici di U sono tutte e sole le matrici della forma
   $$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   con $a \in \mathbb{R}$, quindi $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è una base per U.
   Le matrici di V sono tutte e sole le matrici della forma
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   con $a, b, c \in \mathbb{R}$, quindi $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ è un sistema di generatori per V. Trattandosi di vettori linearmente indipendenti, questo insieme è una base di V.

(c) Determinare $U \cap W$.
Se una matrice A soddisfa sia $A^T = A$ che $A^T = -A$ vuol dire che $A = -A$ cioè che $A = 0$ quindi $U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) Determinare una base per $U + W$.
Poiché $U \cap V$ consiste solo del vettore nullo, una base di $U + V$ sarà data dall'unione insiemistica delle basi di U e V, ovvero:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(e) V e U decompongono $M_2(\mathbb{R})$ in somma diretta? Motivare la risposta.
Poiché $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 4$ *e* $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$*, abbiamo $U + V = M_2(\mathbb{R})$. Inoltre $U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ quindi V e U decompongono $M_2(\mathbb{R})$ in somma diretta.*

2. Sia data l'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata A rispetto alla base canonica $\mathbf{C} = \{E_1, E_2\}$ nel dominio ed alla base canonica $\mathbf{c} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ nel codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base del nucleo di T.
Portando A in forma a scala si vede che A ha rango 2 e che ogni colonna ha un pivot, quindi il nucleo di T consiste del solo vettore nullo di $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinare una base ed equazioni cartesiane dell'immagine di T. Quante equazioni sono necessarie?
Poiché A ha 2 colonne e rango 2, le colonne di A sono una base dell'immagine di T. in altre parole, una base di $Im(T)$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per descrivere l'immagine di T, che è un sottospazio di mathbbR^4 che ha dimensione 4 sono necessarie $4 - \dim(Im(T)) = 2$ equazioni cartesiane. Abbiamo le equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} x_1 &= b \\ x_2 &= a + b \\ x_3 &= -a \\ x_4 &= 2a + 2b \end{aligned}$$

quindi

$$x_1 - -x_2 - x_3 = 0, \quad x_4 - 2x_2 = 0$$

sono equazioni cartesiane di $Im(T)$.

(c) Determinare la controimmagine dei vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La controimmagine di v_1 è data dalle soluzioni del sistema in 4 equazioni e 2 incognite $AX = v_1$ che è incompatibile, quindi $v_1 \notin Im(T)$ e la controimmagine è vuota.
La controimmagine di v_2 è data dalle soluzioni del sistema in 4 equazioni e 2 incognite $AX = v_2$ che la sola soluzione $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi $T^{-1}(v_2) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) Siano v_1 e v_2 come sopra e siano dati i vettori $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$. L'insieme $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e l'insieme $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare la matrice B associata a T rispetto alle basi $\mathbf{w}$ nel dominio e $\mathbf{v}$ nel codominio. Che relazione c'è tra A e B?
Se M è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{c}$ e se N è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori di rispetto alla base $\mathbf{C}$ allora $B = M^{-1}AN$.
Abbiamo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

si calcola

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$B = M^{-1}AN = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -8 & -5 \\ 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un endomorfismo diagonalizzabile, sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di T, di autovalori rispettivamente $0, i, -i$.

   (a) Determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.
   Poiché $T(V_1) = 0$, $T(v_2) = 0v_1 + iv_2 + 0v_3$ *e* $T(v_3) = 0v_1 + 0v_2 - iv_3$ *abbiamo* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

   (b) L'endomorfismo T è iniettivo? T è suriettivo? Motivare la risposta.
   Abbiamo $V_1 \neq 0$ *con* $T(v_1) = 0$ *quindi il nucleo di* T *non è nullo pertanto* T *non è iniettivo e trattandosi di un endomorfismo, non è quindi neanche suriettivo.*

   (c) Determinare il polinomio caratteristico di T.
   Il polinomio caratteristico di T *non dipende dalla base scelta ed è quindi* $-x(i-x)(-i-x) = -(x^3 + x)$.

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 più il polinomio nullo e sia $T = 2\frac{d^2}{dx^2} - 3x\frac{d}{dx}$ l'applicazione che al polinomio $p(x) \in V$ associa $T(p(x)) = 2p''(x) - 3xp'(x)$.

   (a) Dimostrare che $T\colon V \to V$ è un'applicazione lineare.
   Siano $p(x)$ *e* $q(x)$ *due polinomi di* V. *Allora il grado di* $T(p(x))$ *è di nuovo minore o uguale a* 3 *oppure* $T(p(x)) = 0$ *quindi* $T\colon V \to V$.
   Inoltre

   $$T(p(x)+q(x)) = 2(p(x)+q(x))'' - 3x(p(x)+q(x))' = 2p''(x)+2q''(x)-3xp'(x)-3xq'(x)$$

   perché la derivata è lineare e l'ultima espressione è uguale a

   $$2p''(x) - 3xp'(x) + 2q''(x) - 3xq'(x) = T(p(x)) + T(q(x))$$

   quindi la proprietà della somma è verificata.
   Inoltre, per ogni scalare a vale:

   $$T(ap(x)) = 2(ap(x))'' - 3x(ap(x))' = 2ap''(x) - 3axp'(x) = aT(p(x))$$

   quindi anche la proprietà dl prodotto per scalari è rispettata e T *è lineare.*

(b) Determinare la matrice A associata all'applicazione T rispetto alla base $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$.

$T(1) = 0$, $T(x) = -3x$, $T(x^2) = 2 \cdot 2 - 3x(2x) = 4 - 6x^2$ e $T(x^3) = 2 \cdot 3 \cdot 2x - 3x(3x^2) = 12x - 9x^3$ quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare autovalori ed autovettori di T.

Poiché $A - xI$ è triangolare, il determinante è il prodotto degli elementi che si trovano sulla diagonale, vale a dire: $c_A(x) = x(x+3)(x+6)(x+9)$ quindi gli autovalori sono $0, -3, -6, -9$.

Poiché $T(1) = 0$, e 0 ha molteplicità algebrica 1, il polinomio costante 1 genera l'autospazio V_0.

Poiché $T(x) = -3x$, e -3 ha molteplicità algebrica 1, il monomio x genera l'autospazio V_{-3}.

Per gli altri autospazi dobbiamo risolvere i sistemi $(A + 6I)X = 0$ e $(A + 9I)X = 0$.

Una base per lo spazio delle soluzioni del primo sistema è data da $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, quindi $x^2 - \frac{2}{3}$ genera l'autospazio V_{-6}.

Una base per lo spazio delle soluzioni del secondo sistema è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, quindi $x^3 - 2x$ genera l'autospazio V_{-9}.

(d) T è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

Si, T ha tutti gli autovalori reali e con molteplicità algebrica 1.

5. Sia dato il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base di U;

Formando la matrice che ha per righe i generatori di U, e portandola in forma a scala si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi una base di U è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Determinare una base ortonormale di U;

Applicando Gram-Schmidt si ottiene

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

inoltre

$$\langle w_1, w_1 \rangle = 2, \quad \langle w_1, w_1 \rangle = 8$$

quindi una base ortonormale di U è data da $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} w_1, \frac{1}{2\sqrt{2}} w_2 \right\}$.

(c) Determinare una base del complemento ortogonale $U^{\perp}$ di U.

Utilizzando la matrice in forma a scala trovata al punto (a) troviamo le soluzioni del sistema $AX = 0$ dove A è la matrice che ha per righe un sistema di generatori di U. Una base di $U^{\perp}$ è data da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Determinare la proiezione del vettore $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su U.

La proiezione di w su U è data da:

$$\langle w, \frac{1}{2} w_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 + \langle w, \frac{1}{22} w_2 \rangle \frac{1}{2\sqrt{2}} w_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 10 & 17 & 24 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che A è invertibile.

Abbiamo

$$P_{14}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 17 & 24 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_{21}(-3)P_{14}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 21 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}(-2)E_{21}(-3)P_{14}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 21 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice A ha rango 4 ed è quindi invertibile.

(b) Determinare una matrice di permutazione P, una matrice triangolare inferiore L, una matrice diagonale D ed una matrice unipotente triangolare superiore U tali che $PA = LDU$.

Utilizzando i calcoli svolti al punto precedente abbiamo

$$E_{31}(-2)E_{21}(-3)P_{14}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$P = P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$L = E_{21}(3)E_{31}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$