Algebra e Geometria 2 per Informatica
Primo Appello
23 giugno 2006
Tema B

1. Sia data l'applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata A rispetto alla base canonica $\mathbf{C} = \{E_1, E_2\}$ nel dominio ed alla base canonica $\mathbf{c} = \{e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4\}$ nel codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il nucleo di T.

   (b) Determinare una base ed equazioni cartesiane dell'immagine di T. Quante equazioni sono necessarie? Motivare la risposta.

   (c) Determinare la controimmagine dei vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (d) Siano w_1 e w_2 come sopra e siano dati i vettori $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ ed i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$. L'insieme $\mathbf{v} = \{v_1,\, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e l'insieme $\mathbf{w} = \{w_1,\, w_2,\, w_3,\, w_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Determinare la matrice B associata a T rispetto alle basi $\mathbf{v}$ nel dominio e $\mathbf{w}$ nel codominio. Che relazione c'è tra A e B?

2. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$V = \left\{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid B^T = B\right\}$$

il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche e sia

$$U = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\right\}.$$

   (a) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Determinare una base per U ed una base per V. Motivare la risposta.

(c) Determinare $U \cap V$.

(d) Determinare una base per $U + V$.

(e) V e U decompongono $M_2(\mathbb{R})$ in somma diretta? Motivare la risposta.

3. Sia $F\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un endomorfismo diagonalizzabile, sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di F, di autovalori rispettivamente $-2i$, 0, $2i$.

   (a) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base $\{w_1, w_2, w_3\}$.

   (b) L'endomorfismo F è iniettivo? F è suriettivo? Motivare la risposta.

   (c) Determinare il polinomio caratteristico di F, motivando la risposta.

4. Sia $W = \mathbb{R}[x]_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 più il polinomio nullo e sia $T = 4\frac{d^2}{dx^2} - 6x\frac{d}{dx}$ l'applicazione che al polinomio $p(x)$ associa $T(p(x)) = 4p''(x) - 6xp'(x)$.

   (a) Dimostrare che $T\colon W \to W$ è un'applicazione lineare.

   (b) Determinare la matrice A associata all'applicazione T rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

   (c) Determinare autovalori ed autovettori di T.

   (d) T è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

5. Sia dato il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare una base di W;

   (b) Determinare una base ortonormale di W;

   (c) Determinare una base del complemento ortogonale $W^\perp$ di W.

   (d) Determinare la proiezione del vettore $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su W.

6. Sia B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 13 & 22 & 31 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che B è invertibile.

   (b) Determinare una matrice di permutazione P, una matrice triangolare inferiore L, una matrice diagonale D ed una matrice unipotente triangolare superiore U tali che $PB = LDU$.