Algebra Lineare e Geometria per Informatica
Programma A.A. 2004-2005

Primo Appello
23 giugno 2006

1. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A \right\}$$

il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche e sia

$$U = \left\{ B \in M_2(\mathbb{R}) \mid B^T = -B \right\}.$$

   (a) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Determinare una base per U ed una base per W. Motivare la risposta.

2. Sia data la matrice 4×2 a coefficienti reali A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare null(A).

   (b) Determinare una base e la dimensione di im(A).

   (c) Determinare se i seguenti vettori appartengono all'immagine di A.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (d) Sia dato v_1 come sopra. Determinare le soluzioni approssimate del sistema $AX = v_1$.

   (e) Determinare una base di row(A).

3. Sia B una matrice 3×3 diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e sia $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di B, di autovalori rispettivamente $2i$, 0, $-2i$.

   (a) Determinare B sapendo che:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (b) Trovare una base di null(A).

(c) Determinare una base di col(A).

(d) Calcolare il determinante ed il polinomio caratteristico di A motivando la risposta.

4. Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & & +3x_3 & = 0 \\ tx_1 & +x_2 & +3x_3 & = 1 \\ -x_1 & +x_2 & +(t-4)x_3 & = t \\ 5x_1 & & +15x_3 & = t^2 - t \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori del parametro t il sistema ammette una, nessuna o infinite soluzioni.

(b) Calcolare tutte le soluzioni del sistema per $t = 1$.

5. Sia dato il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare una base di U;

(b) Determinare una base ortogonale di U;

(c) Determinare una base ortonormale di U;

(d) Determinare una base del complemento ortogonale $U^{\perp}$ di U.

(e) Determinare la proiezione del vettore $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ su U.

(f) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ che contenga la base descritta al punto (b).

6. Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Dimostrare che A è invertibile.

(b) Determinare la matrice inversa di A.