

Algebra e Geometria 2 - Giovanna Carnovale
Soluzioni Secondo Appello, 4 luglio 2006

1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori u_1, u_2, u_3 dove

- (a) Determinare una base di U .

Costruiamo la matrice A che ha per righe i generatori di U

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che in forma a scala diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

quindi una base di U è data da

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (b) Determinare una base ortonormale di U .

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt otteniamo:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\langle w_1, w_1 \rangle = 2, \quad \langle w_2, w_2 \rangle = 3, \quad \langle w_3, w_3 \rangle = 7$$

una base ortonormale di U sarà data da:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}w_1, \frac{1}{\sqrt{3}}w_2, \frac{1}{\sqrt{7}}w_3 \right\}.$$

- (c) Determinare una base per $U^\perp$.

Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo $AX = 0$. Avendo già portato la matrice A in forma a scala vediamo che una base dello spazio delle soluzioni è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (d) Determinare la proiezione del vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ su U .

È sufficiente applicare la formula:

$$pr_U(v) = \langle v, \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 + \langle v, \frac{1}{\sqrt{3}}w_2 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}}w_2 + \langle v, \frac{1}{\sqrt{7}}w_3 \rangle \frac{1}{\sqrt{7}}w_3$$

che dà il vettore:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Siano $T: V \rightarrow W$ ed $F: V \rightarrow W$ due applicazioni lineari da uno spazio vettoriale V ad uno spazio vettoriale W .

- (a) Si dimostri che l'insieme $S = \{v \in V \mid T(v) = F(v)\}$ è un sottospazio vettoriale di V .

L'insieme S è non vuoto perché $T(0) = 0 = F(0)$ quindi $0 \in S$.

Siano $v, w \in S$ allora $F(v) = T(v)$ e $F(w) = T(w)$. Allora $F(v + w) = F(v) + F(w) = T(v) + T(w) = T(v + w)$ quindi $v + w \in S$.

Sia $v \in S$, $a \in k$ allora $F(v) = T(v)$ perché $v \in S$ e

$$F(av) = aF(v) = aT(v) = T(av)$$

quindi $av \in S$.

- (b) Si determini S nel caso in cui $V = W = M_2(\mathbb{R})$ ed F e T sono date rispettivamente da:

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T$$

S è l'insieme delle matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la cui immagine tramite T coincide con l'immagine tramite F .

Sappiamo che

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

mentre

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

quindi le due immagini coincidono se e solo se $a = c = d = b$. S è quindi il sottospazio vettoriale formato da tutte e sole le matrici della forma $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$.

3. Sia a un parametro reale e sia $T_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare gli autovalori di T_a .

Il polinomio caratteristico di A_a è $(X-1)(X-2)(X-1)$ quindi gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1.

- (b) Determinare per quali valori del parametro a l'applicazione T_a è diagonalizzabile. Motivare la risposta.

Per verificare se una matrice quadrata è diagonalizzabile i cui autovalori sono tutti contenuti nel campo base è sufficiente calcolare la molteplicità geometrica per gli autovalori con molteplicità algebrica > 1 . Nel nostro caso dobbiamo quindi calcolare la dimensione di V_1 , cioè la dimensione di $\text{Ker}(A_a - I)$.

$$A_a - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 se $a \neq 0$ mentre ha rango 1 se $a = 0$, quindi la molteplicità algebrica di 1 coincide con quella geometrica se e solo se $a = 0$. La matrice è quindi diagonalizzabile se e solo se $a = 0$.

- (c) Sia ora $a = 0$. Fornire una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T_0 e determinare la matrice associata all'applicazione T_0 rispetto alla nuova base. Dobbiamo trovare basi per i sistemi omogenei $(A_0 - I)X = 0$ e $(A_0 - 2I)X = 0$. Nel primo caso abbiamo

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

mentre nel secondo caso abbiamo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

quindi una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T_0 è data da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

mentre la matrice associata a T_0 rispetto a questa base è

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Determinare la dimensione ed una base per U ;

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in forma a scala è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi i due generatori di U assegnati formano una base di U , che ha quindi dimensione 2.

- (b) Determinare la dimensione ed una base per W ;

Devo trovare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di W , la cui matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi una base di W è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensione di W è dunque 2.

- (c) Determinare una base per $U + W$;

Creo la matrice che ha come colonne i due vettori della base di U ed i vettori della base di W

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che portata in forma a scala è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi i pivot si trovano sulle prime tre colonne ed una base per $U + V$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Determinare una base per $U \cap W$;

Dobbiamo determinare equazioni cartesiane per U :

sappiamo che equazioni parametriche per U sono date da:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + 2b \\ x_2 &= a \\ x_3 &= a + 2b \\ x_4 &= b \end{aligned}$$

quindi equazioni cartesiane per U sono date da

$$x_1 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$$

Per calcolare l'intersezione risolviamo il sistema omogeneo di equazioni le equazioni parametriche di W e di U , ovvero

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema con il solito metodo otteniamo che una base di $U \cap W$ è data da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ più il polinomio nullo. Si consideri l'endomorfismo T da V in V definito da

$$T(1) = 1 - x; \quad T(x) = x; \quad T(x^2) = 1 - x$$

- (a) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base standard $\mathbf{s} = \{1, x, x^2\}$ di V .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Determinare $\text{Im}(T)$ e $\text{Ker}(T)$ e le loro dimensioni.

Le coordinate dei vettori dell'immagine sono tutte e sole le colonne generate dalle colonne di A che in forma a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi le coordinate dei vettori dell'immagine di T sono tutti e soli i vettori di $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ovvero i polinomi in $\text{span}\{1 - x, x\}$, cioè i polinomi di grado minore o uguale a 1 più lo zero. La dimensione dell'immagine è 2.

Le coordinate dei vettori del nucleo sono date dai vettori che sono soluzione del sistema omogeneo $AX = 0$, ovvero dai vettori le cui coordinate sono in $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ quindi sono i polinomi in $\text{span}\{-1 + x\}$ la cui dimensione è 1

- (c) Determinare la controimmagine del polinomio $p(x) = x^2 + 2$ e la controimmagine del polinomio $q(x) = 3x - 2$.

Il vettore $p(x)$ non ha grado minore o uguale ad 1 quindi non appartiene all'immagine e la sua controimmagine è l'insieme vuoto.

Il vettore $q(x)$ ha coordinate $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e dobbiamo quindi risolvere

il sistema lineare non omogeneo $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ottenere le coordinate dei vettori della controimmagine. La soluzione è data da

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$ quindi la controimmagine di $q(x)$ sarà data dall'insieme $\{ax^2 + x - (2 + a), a \in \mathbb{R}\}$

- (d) Si verifichi che i polinomi $v_1 = 1$, $v_2 = 1 + 2x$, $v_3 = -1 + x^2$ formano un base $\mathbf{v}$ di V .

La matrice M_{vs} che ha per colonne le coordinate dei vettori della nuova base rispetto alla vecchia base è invertibile. Infatti

$$M_{vs} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante $2 \neq 0$

- (e) Si determini la matrice M_{vs} del cambiamento di base dalla base $\mathbf{v}$ alla base standard di V .

Vedere il punto precedente.

- (f) Si determini la matrice M_{sv} del cambiamento di base dalla base standard alla base $\mathbf{v}$ di V . Che relazione c'è tra la matrice M_{vs} e la matrice M_{sv} ?

$M_{vs} = M_{sv}^{-1}$. Si calcola direttamente che

$$M_{sv} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (g) Si determini la matrice D associata a T rispetto alla base $\mathbf{v}$ di V . Che relazione c'è tra la matrice D e la matrice A ?

Sappiamo che $D = M_{sv}AM_{vs}$ quindi per calcolo diretto si ottiene

$$M_{sv} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sia $\det(A)$ il determinante di una matrice A con n righe ed n colonne.

- (a) Sia N una matrice ottenuta a partire da A scambiando due righe tra loro. Che relazione c'è tra $\det(A)$ e $\det(N)$?

$$\det(A) = -\det(N)$$

- (b) Sia M una matrice ottenuta a partire da A moltiplicando una riga per lo scalare a . Che relazione c'è tra $\det(A)$ e $\det(M)$?
 $\det(M) = a \det(A)$
- (c) Si calcoli il valore di $\det(A^T B^{-1} (3A)^4 (2CB)^{-1})$ sapendo che A, B, C sono matrici 3×3 con

$$\det(A) = 2, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizzando le proprietà del determinante troviamo che

$$\begin{aligned} \det(A^T B^{-1} (3A)^4 (2CB)^{-1}) &= \det(A^T) \frac{1}{\det(B)} (3^3 \det(A))^4 \frac{1}{\det(2CB)} \\ &= \det(A) \frac{1}{\det(B)} (3^{12} \det(A)^4) \frac{1}{2^3 \det(C) \det(B)} \end{aligned}$$

La matrice B è triangolare superiore quindi il determinante è il prodotto degli elementi che si trovano sulla diagonale principale, cioè $27 = 3^3$. Inoltre abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 4 = 2^2$$

quindi l'espressione diventa:

$$\begin{aligned} \det(A^T B^{-1} (3A)^4 (2CB)^{-1}) &= 2 \frac{1}{3^3} 3^{12} 2^4 \frac{1}{2^3 2^2 3^3} \\ &= 3^6 = 81 \times 9 = 729 \end{aligned}$$