

Algebra e Geometria 2 - Giovanna Carnovale
3 maggio 2006

1. Sia $V = M_{nn}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali. Per una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in V$$

sia $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (la traccia della matrice A).

- (a) Dimostrare che l'insieme

$$W = \{B \in V \mid Tr(B) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di V .

- (b) Trovare una base di W nel caso in cui $n = 2$. Determinare la dimensione di W nel caso in cui $n = 2$.
(c) Trovare una base di W nel caso in cui $n = 3$. Determinare la dimensione di W nel caso in cui $n = 3$.
(d) Provare ad analizzare il caso in cui n è generico.
2. Trovare una base per il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare inoltre una base per il sottospazio generato dai vettori riga della matrice A e per lo spazio generato dai vettori colonna della matrice A .

- (a) Determinare per quali valori del parametro λ i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (b) Dire come cambia la dimensione del sottospazio W generato da v_1, v_2, v_3 al variare del parametro λ .
(c) Determinare una base per il sottospazio W al variare del parametro λ .

3. Determinare matrici P, L, D, U per la fattorizzazione di Gauss della matrice invertibile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Determinare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $V_4 = \mathbb{C}[x]_{\leq 4} \cup \{0\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore o uguale a 4 più il polinomio 0.

- Determinare una base di V_4 e la dimensione di V_4 .
- Dimostrare che l'insieme $\{i, x - 2i, x^2 - 3, x^3 - (1 + i)x^2, x^4\}$ è una base di V_4 .
- Determinare le coordinate del vettore $(1 + 2i)x^4 - x^2$ rispetto alla base data al punto precedente.

6. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Determinare una base per W , per U , per $U \cap W$ e per $U + W$.
 - Determinare la dimensione dei sottospazi vettoriali W , U , $U \cap W$ e $U + W$.
 - Dire se U e W sono in somma diretta e se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ oppure no.
7. Esercizi sul determinante (e sulle sottovarietà affini, se trattate): dal libro di testo.