Algebra e Geometria 2 - Giovanna Carnovale ed Eloisa Detomi
5 giugno 2006

1. Sia $V = M_{22}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali. Sia $T: V \rightarrow V$ l'applicazione definita da $T(B) = 2B^T - B$ per ogni matrice B di V .
 - (a) Dimostrare che l'applicazione T è lineare.
 - (b) Scrivere la matrice A associata a T rispetto alla base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ di V .
 - (c) Determinare gli autovalori di T .
 - (d) Determinare gli autospazi di T , scrivendoli esplicitamente come sottoinsiemi di V .
 - (e) Dire se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile C ed una matrice diagonale D per le quali $C^{-1}AC = D$.
 - (f) Determinare il nucleo di T .
 - (g) Determinare l'immagine di T .
 - (h) Determinare l'immagine inversa dei vettori E_{11} e $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro e A_t la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $Im A_t$ e $Ker A_t$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Sia T_t l'applicazione lineare che ha A_t come matrice associata alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ del dominio e di $\mathbb{R}^3$ nel codominio. Sia dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione T_t è iniettiva e per quali è suriettiva.
 - (c) Dato il vettore $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, si calcoli la contrimmagine $Im_{T_t}^{-1}(y)$ e si dica se $y \in Im(A_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
3. Sia $f: \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

- (a) Provare che l'applicazione f e' lineare.
- (b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ del dominio e di $\mathbb{R}^3$ nel codominio.
- (c) Determinare Imf , $Kerf$ e le loro dimensioni.
- (d) Verificare che gli insiemi

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sono base di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente.

- (e) Determinare la matrice A del cambiamento dalla base $\mathbf{v}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, la matrice B del cambiamento dalla base $\mathbf{w}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, ed infine la matrice C associata ad f rispetto le basi $\mathbf{v}$ nel dominio e $\mathbf{w}$ nel codominio.
4. Nello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali si considerino la base canonica $\mathbf{e} = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ e la base $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dove

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathbf{v}$ (o viceversa).
 - (b) Sia T l'applicazione da $M_{2,2}(\mathbb{R})$ in se' definita da $T(X) = v_2X$. Verificare che T è applicazione lineare e scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\mathbf{v}$ nel dominio e la base canonica nel codominio.
5. Determinare per quali valori del parametro λ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 - \lambda & 2 \\ 0 & 9 & 6 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

6. Risolvere, utilizzando la formula di Cramer, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & = 3 \\ 5x_1 & -3x_2 & = 15 \end{cases}$$

7. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo K . Siano $S: V \rightarrow W$ e $T: V \rightarrow V$ due applicazioni lineari.

(a) Sia $S+T: V \rightarrow W$ l'applicazione definita da $(S+T)(v) = S(v)+T(v)$ per ogni $v \in V$. Dimostrare che $S+T$ è un'applicazione lineare.

(b) Sia $a \in K$ e sia $aS: V \rightarrow W$ l'applicazione definita da $(aS)(v) = a(S(v))$ per ogni $v \in V$. Dimostrare che aS è un'applicazione lineare.

8. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}}$ il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$.

(a) Dimostrare che se A è simmetrica, autovettori di A rispetto ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.

(b) Dimostrare che se A è ortogonale, 0 non è un autovalore di A .

(c) Dimostrare che se A è ortogonale, se X è un autovettore di A relativo all'autovalore λ allora AX è un autovettore di A^T relativo all'autovalore λ^{-1} .

9. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato,

rispetto alla base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) Determinare $\text{Ker}(T)$, $\text{Im}(T)$ e le loro dimensioni, al variare del parametro λ .

(b) Stabilire per quali valori di λ l'endomorfismo T è diagonalizzabile.

10. Sia dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Determinare una base per W .

(b) Determinare una base per $W^\perp$.

(c) Determinare una base ortonormale di W .

(d) Determinare una base ortonormale di $W^\perp$.

(e) Decomporre il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come somma di un vettore di W e di un vettore di $W^\perp$.

11. Determinare per quale valore del parametro k il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ k & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

12. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. In caso affermativo, determinare una matrice invertibile C ed una matrice diagonale D per le quali $C^{-1}AC = D$.

(b) Dire se la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$. In caso affermativo, determinare una matrice invertibile C ed una matrice diagonale D per le quali $C^{-1}AC = D$.

13. Si definisce su $\mathbb{C}^n$ il prodotto hermitiano canonico $\langle -, - \rangle_{\mathbb{C}}$ mediante la formula:

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{C}} = X^T \bar{Y}$$

dove $\bar{Y}$ è la colonna di $\mathbb{C}^n$ avente per componenti i complessi coniugati delle componenti di Y .

(a) Dimostrare che per ogni $X, Y, Z \in \mathbb{C}^n$ e per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ si ha $\langle aX + bY, Z \rangle_{\mathbb{C}} = a\langle X, Z \rangle_{\mathbb{C}} + b\langle Y, Z \rangle_{\mathbb{C}}$;

(b) Dimostrare che per ogni $X, Y, Z \in \mathbb{C}^n$ si ha $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle Y, X \rangle_{\mathbb{C}}}$;

(c) Dimostrare che $\langle X, X \rangle_{\mathbb{C}}$ è 0 se e solo se X è la colonna nulla.

(d) Dimostrare che per ogni $X, Y, Z \in \mathbb{C}^n$ e per ogni $a, b \in \mathbb{C}$ si ha $\langle Z, aX + bY \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{a}\langle Z, X \rangle_{\mathbb{C}} + \bar{b}\langle Z, Y \rangle_{\mathbb{C}}$;

(e) Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica, a coefficienti reali. Dimostrare che $\langle AX, Y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle X, AY \rangle_{\mathbb{C}}$.

(f) Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica, a coefficienti reali. Sia $X \in \mathbb{C}^n$ un autovettore di A relativo all'autovalore λ . Dimostrare, calcolando $\langle AX, X \rangle_{\mathbb{C}}$, che λ è necessariamente un numero reale.