Algebra e Geometria 2 - Giovanna Carnovale
11 maggio 2006

1. Sia $V = M_{nn}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali. Per una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in V$$

sia A^T (la trasposta della matrice A) la matrice $n \times n$ ottenuta scambiando le righe di A con le sue colonne, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in V$$

sia A^T

   (a) Dimostrare che l'insieme

$$W = \{B \in V \mid B^T = B\}$$

   è un sottospazio vettoriale di V.

   (b) Trovare una base di W nel caso in cui $n = 2$. Determinare la dimensione di W nel caso in cui $n = 2$.

   (c) Trovare una base di W nel caso in cui $n = 3$. Determinare la dimensione di W nel caso in cui $n = 3$.

   (d) Provare ad analizzare il caso in cui n è generico.

2. Trovare una base, al variare del parametro λ, per il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3-\lambda & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 6 & 0 & 3 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare inoltre una base per il sottospazio generato dai vettori riga della matrice A e per lo spazio generato dai vettori colonna della matrice A.

   (a) Determinare per quali valori del parametro μ i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu - 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Dire come cambia la dimensione del sottospazio W generato da v_1, v_2, v_3 al variare del parametro μ.

(c) Estrarre, dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base per il sottospazio W al variare del parametro μ.

3. Determinare matrici P, L, D, U per la fattorizzazione di Gauss della matrice invertibile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Determinare, al variare del parametro ν, le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} \nu \\ 3\nu \\ 1-\nu \end{pmatrix}$ rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid p^{(3)}(x) \equiv 0\}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali la cui derivata terza è identicamente nulla.

(a) Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Determinare una base di V e la dimensione di V.

(c) Dimostrare che l'insieme $\{p_1(x) = \frac{1}{2}, p_2(x) = x - 2, p_3(x) = x^2 + \frac{3}{2}$ è una base di V.

(d) Osservare che $q(x) = x^2 - \frac{5}{2}x$ è un elemento di V e trovare le coordinate di $Q(x)$ rispetto alla base ordinata $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$.

6. (Se possibile) Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Determinare una base per W, per U, per $U \cap W$ e per $U + W$.

(b) Determinare la dimensione dei sottospazi vettoriali W, U, $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Dire se U e W sono in somma diretta e se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ oppure no.

7. Esercizi sul determinante (e sulle sottovarietà affini, se trattate): dal libro di testo.