Algebra Lineare e Geometria per Informatica
Terzo appello, 6 settembre 2005

Esercizio 1

Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & -k \\ x_1 & +x_2 & +kx_3 & = & 1 \\ x_1 & +kx_2 & +kx_3 & = & 0 \end{array}$$

- a) Determinare per quali valori del parametro k il sistema ammette una, nessuna, infinite soluzioni.
- b) Calcolare tutte le soluzioni approssimate del sistema per $k = 1$.

Esercizio 2

Sia $\mathbb{P}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali.

- a) Dimostrare che gli elementi

$$1, x, x^2, x^3$$

formano una base del sottospazio $\mathbb{P}_3$ dei polinomi di grado al più 3 in $\mathbb{P}$.

- b) Sia $v \in \mathbb{P}$ un polinomio che non appartiene a $\mathbb{P}_3$. Si calcoli la dimensione dello spazio

$$\langle 1, x, x^2, x^3, v \rangle.$$

Esercizio 3

- a) Si completi la seguente definizione: "Due matrici quadrate A e B sono dette simili se..."
- b) Si dimostri che se A è simile a B allora $\det A = \det B$;
- c) Si dimostri che se A è simile a B allora per ogni intero positivo n , A^n è simile a B^n .

Esercizio 4

Sia dato il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad X_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Determinare una base ortogonale di W ;
- b) Si scriva il vettore $v = [0, 18, 0, -4]^T$ come somma di un vettore v_1 di W e di un vettore v_2 di $W^\perp$.
- c) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ che contenga i vettori trovati nel punto a).

CONTINUA

Esercizio 5

Determinare per quale valore del parametro k il vettore $v = [1, -1, 1]^T$ è autovettore della matrice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ k & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 6

a) Stabilire se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 7

Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix}$$

- Verificare che A è invertibile per ogni valore reale del parametro k . E' vero anche per ogni valore complesso di k ?
- Calcolare la matrice inversa per $k = -1$.

Esercizio 8

Sia A una matrice $n \times n$ e siano v_1 e v_2 autovettori associati ad autovalori distinti di A . Provare che $v_1 + v_2$ non è autovettore di A .