MATEMATICA 2 per Informatica
Secondo appello, 8 luglio 2004

TEMA B

Esercizio 1

a) Si completi la seguente definizione: “Due vettori Z_1 ed Z_2 di $\mathbb{R}^m$ sono detti ortogonali se...”

Soluzione: *il loro prodotto scalare è nullo, cioè* $Z_1 \bullet Z_2 = 0$.

b) Siano dati due vettori linearmente indipendenti Y_1 ed Y_2 in $\mathbb{R}^m$. Sia $Z = cY_1 + dY_2$ con c e d in $\mathbb{R}$. Verificare che Z è ortogonale a se stesso se e soltanto se $c = d = 0$.

Soluzione: Un vettore $Z = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^m$ è ortogonale a sé stesso se e solo se è il vettore nullo. Infatti $x_1^2 + \cdots x_m^2 = 0$ se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$. Ora, $Z = cY_1 + dY_2$ è il vettore nullo se e solo se $c = d = 0$ perché Y_1 ed Y_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2

Sia data la matrice $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determinare una base per $row(B)$, lo spazio delle righe di B.
b) Determinare una base per $col(B)$, lo spazio delle colonne di B.
c) Determinare una base per $null(B)$, lo spazio annullatore di B.

Soluzione: *La forma a scala ridotta della matrice B è:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto una base per $row(B)$ è data dalle righe non nulle della sua forma a scala ridotta: $\{[1\ 0\ \frac{1}{2}\ -1], [0\ 1\ \frac{1}{2}\ 1]\}$. Una base per $col(B)$ è data dalle colonne di B corrispondenti alle colonne della sua forma a scala ridotta nelle quali compaiono gli 1-dominanti, cioè: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Una base per $null(B)$ è data *dalle soluzioni-base del sistema lineare $BX = 0$, quindi:* $\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

Esercizio 3

Sia s un numero reale e sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + (s-2)x_3 & = s \\ -x_1 - \ x_2 \qquad\qquad + x_3 & = -1 \\ 2x_1 - sx_2 & = 0 \end{cases}$$

a) Determinare per quali valori di s il sistema ammette soluzioni.

Soluzione: *La matrice completa del sistema è*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s-2 & s \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che tramite operazioni elementari diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s-2 & s \\ 0 & s+2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & s-1 & s-1 \end{bmatrix}.$$

Se $s = 1$ questa matrice è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

quindi il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice dei coefficienti (ed è uguale a 2) ed il sistema ammette (infinite) soluzioni. Se invece $s \neq 1$ possiamo dividere la quarta riga per $s-1$ ottenendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s-2 & s \\ 0 & s+2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $s + 2 = 0$ allora il rango della matrice dei coefficienti è 2 mentre il rango della matrice completa è 3 ed il sistema non ammette soluzione. Se invece $s+2 \neq= 0$ allora il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice dei coefficienti (ed è uguale a 3) quindi il sistema ammette una sola soluzione. Pertanto il sistema ammette soluzione se e solo se $s \neq -2$.

b) Calcolare tutte le soluzioni del sistema per $s = -1$.

Soluzione:*Sostituendo $s=-1$ nella matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & s-2 & s \\ 0 & s+2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che in forma a scala ridotta diviene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema ammette l'unica soluzione $[-2\ 4\ 1]^T$.

Esercizio 4

Dati due numeri reali $a,\ b$ con $b \neq 0$, si consideri la matrice $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

a) Si verifichi che C non è diagonalizzabile nei reali.

Soluzione:*Il polinomio caratteristico di C è $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$. Esso si annulla per i valori $a \pm \sqrt{-b^2}$. Poiché $b \neq = 0$ ed è reale, $-b^2 < 0$ quindi le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori, non sono mai reali, quindi la matrice non può essere diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*

b) Si scriva una matrice diagonale D simile ad C sui complessi, giustificando la risposta. **Soluzione:***Poiché $b \neq 0$, i due autovalori sono sempre distinti. Pertanto la matrice C è diagonalizzabile sui complessi, ovver C è simile alla matrice* $D = \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix}$.

Esercizio 5

Sia data la matrice $B = \begin{bmatrix} b-3 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & b+1 \\ b-3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determinare per quali valori del parametro reale b la matrice B è invertibile.

Soluzione: *Il determinante di B è $-(b-1)(b-3)$. esso si annulla solo per $b = 1$ e $b = 3$. Per tali valori la matrice non è invertibile, per tutti gli altri valori di b in $\mathbb{R}$ la matrice è invertibile.*

b) Calcolare B^{-1} per $b = 2$.

Soluzione:*Per $b = 2$ abbiamo:*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Tramite operazioni elementari sulle righe otteniamo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Pertanto, la matrice inversa richiesta è:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 6

Sia data la matrice $N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -3 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$

a) Si verifichi che i numeri -1 e 2 sono autovalori di N.

Soluzione: Il polinomio caratteristico di N è $c_N(X) = (X+1)(X^2 - X - 2)$. E' facile verificare che $c_N(-1) = 0$ e che $c_N(2) = 0$.

b) Si dica, giustificando la risposta, se N è diagonalizzabile.

Soluzione: Poiché le radici di $(X^2 - X - 2)$ sono -1 e 2, l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 2, mentre l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 1. Pertanto è sufficiente verificare quale sia la molteplicità geometrica di -1. Poiché il rango di $(-I - N)$ è 1, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è 2, quindi la matrice è diagonalizzabile.