MATEMATICA 2 per Informatica
Prima prova di accertamento
18 maggio 2004

Tema A

Esercizio 1

Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \\ \lambda & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A è invertibile.

Soluzione: A è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Dai calcoli risulta $\det(A) = \lambda(\lambda - 2)$ pertanto A è invertibile per μ diverso da 0 e 2.

b) Si calcoli A^{-1} per $\lambda = 1$.

Soluzione: Scriviamo

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Tramite operazioni elementari arriviamo a:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

pertanto $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$

Esercizio 2

Siano A e B due matrici 4×4 . Calcolare $\det(A^t B^2 (7A^{-1}B)^2)$ sapendo che $\det(A) = -2$ e che $\det(B) = 1$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \det(A^t B^2 (7A^{-1}B)^2) &= \det(A^t) \det(B^2) \det((7A^{-1}B)^2) = \\ \det(A) \det(B)^2 (\det(7A^{-1}B))^2 &= \det(A) \det(B)^2 (7^4 \det(A^{-1}) \det(B))^2 = \\ \det(A) \det(B)^2 7^8 \det(A)^{-2} \det(B)^2 &= (-2) 7^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7^8}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Si trovino tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2 \\x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4\end{aligned}$$

Soluzione: La matrice completa associata al sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tramite operazioni elementari portiamo la matrice nella forma a scala ridotta

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le incognite dominanti sono x_1 e x_3 . Ponendo $x_2 = s$ e $x_4 = t$ con s e t parametri, otteniamo che le soluzioni del sistema sono

$$X = \begin{bmatrix} s - 2t \\ s \\ 2 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

al variare di parametri s e t .

Esercizio 4

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti reali. Si dica, giustificando la risposta, sotto quali condizioni $\det(-A) = \det(A)$.

Soluzione: Sappiamo che $\det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \det(A)$. Pertanto $\det(A) = \det(-A)$ se e soltanto se $\det(A) = (-1)^n \det(A)$, cioè $\det(A) - (-1)^n \det(A) = 0$, vale a dire $\det(A)(1 - (-1)^n) = 0$. Tale prodotto è zero se e solo se uno dei due fattori è zero, pertanto $\det(-A) = \det(A)$ se e solo se $\det(A) = 0$ oppure n è pari.

Esercizio 5

Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A .

Soluzione: Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$c_A(x) = \det(xI - A) = x^2 - 4x + 5$$

che sono $2 + i$ e $2 - i$.

b) Scelto un autovalore λ di A , si trovino tutti gli autovettori associati a λ .

Soluzione: Scelto l'autovalore $\lambda = 2 + i$, gli autovettori associati a λ sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo $(\lambda I - A)X = 0$. La matrice dei coefficienti associata al sistema è

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

che tramite operazioni elementari diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

quindi le soluzioni del sistema sono $X = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ per $t \in \mathbb{C}$ e gli autovettori asso-

ciati a $2 + i$ sono $X = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ per $t \in \mathbb{C}$ e $t \neq 0$. Si osservi che la definizione di autovalore ci assicurava l'esistenza di soluzioni non nulle del sistema associato.

(Gli autovettori associati a $2 - i$ sono $X = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ per $t \in \mathbb{C}$ e $t \neq 0$.)

Esercizio 6

a) Come si determina il rango di una matrice?

Soluzione: Il rango di una matrice A si determina contando il numero degli 1-dominanti della forma a scala ridotta di A .

b) Si completi la seguente frase:

“Il sistema di equazioni lineari $AX = B$ ha soluzione se e solo se...”

Soluzione: il rango della matrice completa $[A|B]$ del sistema è uguale al rango della matrice A dei coefficienti.