MATEMATICA 2 per Informatica
Prima prova di accertamento
18 maggio 2004

Tema B

Esercizio 1

Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mu - 2 & 1 \\ -\mu & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si determinino i valori di $\mu \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A è invertibile.
Soluzione: A è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Dai calcoli risulta $\det(A) = \mu(\mu - 2)$ *pertanto A è invertibile per μ diverso da* 0 *e* 2.

b) Si calcoli A^{-1} per $\mu = 1$.
Soluzione: Scriviamo

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Tramite operazioni elementari arriviamo a:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

pertanto $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

Esercizio 2

Siano C e D due matrici 5×5. Calcolare $\det(D^2 C^t (2D^{-1}C)^3)$ sapendo che $\det(C) = -2$ e che $\det(D) = 1$.
Soluzione:

$$\det(D^2 C^t (2D^{-1}C)^3) = \det(D)^2 \det(C^t)(\det(2D^{-1}C))^3 =$$

$$\det(D)^2 \det(C)(2^5 \det(D)^{-1} \det(C))^3 = \det(D)^2 \det(C) 2^{15} \det(D)^{-3} \det(C)^3 =$$

$$2^{15} \det(C)^4 \det(D)^{-1} = 2^{19}.$$

Esercizio 3

Si trovino tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 & = & 4 \\ x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

Soluzione: La matrice completa associata al sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tramite operazioni elementari portiamo la matrice nella forma a scala ridotta

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le incognite dominanti sono x_1 *e* x_3*; ponendo* $x_2 = s$ *e* $x_4 = t$ *con* s *e* t *paramentri, otteniamo che le soluzioni del sistema sono*

$$X = \begin{bmatrix} s+2 \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

al variare di parametri s *e* t*.*

Esercizio 4

Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti reali. Si dica, giustificando la risposta, sotto quali condizioni $\det(-A) = \det(A)$.

Soluzione: Sappiamo che $\det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^n \det(A)$*. Pertanto* $\det(A) = \det(-A)$ *se e soltanto se* $\det(A) = (-1)^n \det(A)$*, cioè* $\det(A) - (-1)^n \det(A) = 0$*, vale a dire* $\det(A)(1 - (-1)^n) = 0$*. Tale prodotto è zero se e solo se uno dei due fattori è zero, pertanto* $\det(-A) = \det(A)$ *se e solo se* $\det(A) = 0$ *oppure* n *è pari.*

Esercizio 5

Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si calcolino gli autovalori di A.

Soluzione: Gli autovalori di A *sono le radici del polinomio caratteristico*

$$c_A(x) = det(xI - A) = x^2 - 2x + 2$$

che sono $1 + i$ *e* $1 - i$*.*

b) Scelto un autovalore λ di A, si trovino tutti gli autovettori associati a λ.
Soluzione: Scelto l'autovalore $\lambda = 1 + i$, *gli autovettori associati a* λ *sono le soluzioni non nulle del sistema omogeneo* $(\lambda I - A)X = 0$. *La matrice dei coefficienti associata al sistema è*

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

e tramite operazioni elementari diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

quindi le soluzioni del sistema sono $X = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ *per* $t \in \mathbb{C}$ *e gli autovettori associati a* $1+i$ *sono* $X = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ *per* $t \in \mathbb{C}$ *e* $t \neq 0$. *Si osservi che la definizione di autovalori ci assicurava l'esistenza di soluzioni non nulle del sistema omogeneo.*

(Gli autovettori associati a $1 - i$ *sono* $X = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ *per* $t \in \mathbb{C}$ *e* $t \neq 0$.*)*

Esercizio 6

a) Come si determina il rango di una matrice?
Soluzione: Il rango di una matrice A *si determina contando il numero degli 1-dominanti della forma a scala ridotta di* A.
b) Supponiamo che il sistema di equazioni lineari $AX = B$ ammetta soluzione. Si completi la seguente frase:

"La soluzione è unica se e solo se..."

Soluzione: il rango della matrice A *è uguale al numero delle incognite, cioè il numero delle colonne di* A.