

MATEMATICA 2 per Informatica
Secondo appello, 8 luglio 2004

TEMA A

Esercizio 1

Vedere tema B.

Esercizio 2

Sia data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Determinare una base per $\text{row}(A)$, lo spazio delle righe di A .
- b) Determinare una base per $\text{col}(A)$, lo spazio delle colonne di A .
- c) Determinare una base per $\text{null}(A)$, lo spazio annullatore di A .

Soluzione: La forma a scala ridotta della matrice B è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto una base per $\text{row}(A)$ è data dalle righe non nulle della sua forma a scala ridotta: $\{[1 \ 0 \ -1 \ \frac{1}{2}], [0 \ 1 \ 1 \ \frac{1}{2}]\}$. Una base per $\text{col}(A)$ è data dalle colonne di A corrispondenti alle colonne della sua forma a scala ridotta nelle quali compaiono gli 1-dominanti, cioè: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Una base per $\text{null}(A)$ è data

dalle soluzioni-base del sistema lineare $AX = 0$, quindi: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Esercizio 3

Sia t un numero reale e sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + tx_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + (1+t)x_3 = t-1 \end{cases}$$

- a) Determinare per quali valori di t il sistema ammette soluzioni.

Soluzione: La matrice completa del sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & t & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1+t & t-1 \end{bmatrix}$$

che tramite operazioni elementari diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & t & t \end{bmatrix}.$$

Se $t = 0$ questa matrice è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

quindi il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice dei coefficienti (ed è uguale a 2) ed il sistema ammette (infinite) soluzioni. Se invece $t \neq 0$ possiamo dividere la quarta riga per t ottenendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $t - 2 = 0$ allora il rango della matrice dei coefficienti è 2 mentre il rango della matrice completa è 3 ed il sistema non ammette soluzione. Se invece $t - 2 \neq 0$ allora il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice dei coefficienti (ed è uguale a 3) quindi il sistema ammette una sola soluzione. Pertanto il sistema ammette soluzione se e solo se $t \neq 2$.

b) Calcolare tutte le soluzioni del sistema per $t = 1$.

Soluzione: Sostituendo $t = 1$ nella matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & t-2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che in forma a scala ridotta diviene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema ammette l'unica soluzione $[-2 \ 4 \ 1]^T$.

Esercizio 4

Dati due numeri reali a, b con $b \neq 0$, si consideri la matrice $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

a) Si verifichi che C non è diagonalizzabile nei reali.

Soluzione: Il polinomio caratteristico di C è $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$. Esso si annulla per i valori $a \pm \sqrt{-b^2}$. Poiché $b \neq 0$ ed è reale, $-b^2 < 0$ quindi le radici del polinomio caratteristico, cioè gli autovalori, non sono mai reali, quindi la matrice non può essere diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

b) Si scriva una matrice diagonale D simile ad C sui complessi, giustificando la risposta. **Soluzione:** Poiché $b \neq 0$, i due autovalori sono sempre distinti. Pertanto la matrice C è diagonalizzabile sui complessi, ovvero C è simile alla

$$\text{matrice } D = \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5

$$\text{Sia data la matrice } A = \begin{bmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+2 \\ a-2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile.

Soluzione: Il determinante di A è $-a(a-2)$. Esso si annulla solo per $a = 0$ e $a = 2$. Per tali valori la matrice non è invertibile, per tutti gli altri valori di a in $\mathbb{R}$ la matrice è invertibile.

b) Calcolare A^{-1} per $a = 1$.

Soluzione: Per $a = 1$ abbiamo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Tramite operazioni elementari sulle righe otteniamo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Pertanto, la matrice inversa richiesta è:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 6

$$\text{Sia data la matrice } M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \\ -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi che i numeri -1 e 2 sono autovalori di N .

Soluzione: Il polinomio caratteristico di M è $c_M(X) = (X+1)(X^2-X-2)$. È facile verificare che $c_M(-1) = 0$ e che $c_M(2) = 0$.

b) Si dica, giustificando la risposta, se M è diagonalizzabile.

Soluzione: Poiché le radici di $(X^2 - X - 2)$ sono -1 e 2 , l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 2 , mentre l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 1 . Pertanto è sufficiente verificare quale sia la molteplicità geometrica di -1 . Poiché il rango di $(-I - M)$ è 1 , la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 è 2 , quindi la matrice è diagonalizzabile.