Algebra e Geometria 2 - Giovanna Carnovale
Seconda prova parziale - 15 giugno 2006 - Tema A

1. Giustificare brevemente per quale motivo la matrice A non è diagonalizzabile sul campo K assegnato.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, su $K = \mathbb{R}$.

   Le radici del polinomio caratteristico X^2+6 non appartengono ad $\mathbb{R}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, su $K = \mathbb{C}$.

   La matrice A ha solo l'autovalore 2, con molteplicità algebrica 2. La matrice $A-2I$ ha rango 1 quindi la molteplicità geometrica di 2 è 1.

2. Siano $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ed $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due applicazioni lineari.

   (a) Dimostrare che l'applicazione $S \circ T$ definita da $S \circ T(X) = S(T(X))$ per ogni colonna X di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare. *Se $X, Y \in \mathbb{R}^n$ allora*

   $$S\circ T(X+Y) = S(T(X+Y)) = S(T(X)+T(Y)) = S(T(X))+S(T(Y))$$

   nel primo passaggio abbiamo usato la definizione di $S\circ T$, nel secondo che T è lineare, nel terzo abbiamo usato che S è lineare.
   Se $X \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$ allora

   $$S \circ T(aX) = S(T(aX)) = S(aT(X)) = aS(T(X))$$

   nel primo passaggio abbiamo usato la definizione di $S\circ T$, nel secondo che T è lineare, nel terzo abbiamo usato che S è lineare.

   (b) Sia A_T la matrice associata a T rispetto alla base canonica e sia A_S la matrice associata a S rispetto alla base canonica. Come è fatta la matrice associata ad $S \circ T$ rispetto alla base canonica?
   Se $X \in \mathbb{R}^n$ allora

   $$S \circ T(X) = S(T(X)) = S(A_T X) = A_S A_T X = (A_S A_T)X$$

   quindi la matrice associata a $S \circ T$ è $A_S A_T$.

3. Sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro e sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo T_t da V in V definito da

   $$T_t(1) = 1; \quad T_t(x) = x + x^2; \quad T_t(x^2) = (t-1)x + x^2; \quad T_t(x^3) = x^2 + x^3$$

   (a) Determinare la matrice A_t associata a T_t rispetto alla base $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ di V.

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (t-1) & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione T_t risulta iniettiva e per quali risulta suriettiva.

Si calcola facilmente che $\det(A_t) = 2 - t$. *Trattandosi di un endomorfismo,* T_t *è iniettivo se e solo se è suriettivo. Ciò se accade se e solo se* $\det(A_t) = 2 - t \neq 0$ *quindi per* $t \neq 2$.

(c) Determinare per quali valori del parametro t l'applicazione T_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. *Il polinomio caratteristico di* T_t *è*

$$\det(A_t - xI) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & (t-1) & 0 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$(1-x)^2 \det \begin{pmatrix} 1-x & (t-1) \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2(x^2 - 2x + 2 - t)$$

Le radici del polinomio caratteristico sono quindi $1,\ 1 \pm \sqrt{(t-1)}$.

Se $t < 1$ *gli autovalori non sono tutti reali quindi* T_t *non è diagonalizzabile.*

Se $t = 1$ *tutti gli autovalori coincidono, sono uguali ad* 1 *che ha quindi molteplicità algebrica* 4. *Il rango di* $A_t - I$ *per* $t = 1$ *è* 1 *quindi la molteplicità geometrica di* A_t *è* 3 *pertanto* T_t *non è diagonalizzabile.*

Se $t > 1$ *ho due autovalori reali di mo,teplicità algebrica* 1 *e l'autovalore reale* 1 *che ha molteplicità algebrica* 2. *Il rango di* $A_t - I$ *è* 2 *quindi la molteplicità geometrica di* A_t *è* 2 *pertanto* T_t *è diagonalizzabile.*

(d) Sia $t = 2$. Determinare una base di V formata da autovettori di T_2 e determinare la matrice associata a T_2 rispetto alla base trovata.

Se $t = 2$ *l'endomorfismo* T_2 *ha autovalori* $\lambda_1 = 1$ *con molteplicità algebrica* 2, $\lambda_2 = 2$ *e* $\lambda_3 = 0$ *con molteplicità algebrica* 1.

L'autospazio V_1 *corrisponde ai vettori le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione* $(A_2 - I)X = 0$, *ovvero i vettori le cui coordinate rispetto alla base sono combinazioni lineari di* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

vale a dire: una base di V_1 *è data da* $\{1,\ x - x^3\}$.

L'autospazio V_0 *corrisponde ai vettori le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione* $A_2X = 0$, *ovvero i vettori le cui coordinate rispetto alla* *base sono multipli di* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *vale a dire: una base di* V_0 *è data da* $\{x - x^2\}$.

L'autospazio V_2 *corrisponde ai vettori le cui coordinate sono soluzioni dell'equazione* $(A_2 - 2I)X = 0$, *ovvero i vettori le cui coordinate rispetto alla base sono multipli di* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *vale a dire: una base di* V_2 *è data da* $\{x + x^2\}$.

Una base di autovettori è dunque $\{1, x - x^3, x - x^2, x + x^2\}$. *La matrice associata all'applicazione* T_2 *rispetto a questa base è*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base ortonormale di V.

Determino prima una base di V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tramite operazioni di riga ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che mi sarà utile anche per risolvere il punto c.

Una base di V *è*

$$\left\{ v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Applico il procedimento di Gram-Schmidt:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - 0w_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ottenendo una base di V di vettori tra loro ortogonali.
Una base ortonormale di V è data dunque da:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{3}}w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{7}}w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \\ -\frac{2}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Determinare la proiezione del vettore $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ su V.

La proiezione di e_2 su V è data dal vettore:

$$\langle e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}w_1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 + \langle e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}w_2\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}w_2 + \langle e_2, \frac{1}{\sqrt{7}}w_3\rangle \frac{1}{\sqrt{7}}w_3 = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 1 \\ 41 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(c) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ contenente la base trovata nel punto (a).

Ho già una base ortonormale di V, quindi è sufficiente trovare una base ortonormale di $V^\perp$ e considerare l'unione delle due basi. Abbiamo già portato in forma a scala la matrice che ha per righe i generatori di V, quindi per avere una base di $V^\perp$ dobbiamo solo trovare una base dello spazio nullo di questa matrice, che ha dimensione $4-3=1$:

ad esempio $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. *Trattandosi di un solo vettore, questo insieme è già ortogonale. Normalizzando il vettore della base di* $V^\perp$ *ottenuto abbiamo* $v = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ *e la base ortonormale cercata di* $\mathbb{R}^4$ *è*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{3}} w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{7}} w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \\ -\frac{2}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \right\}$$

5. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una sua base. Si consideri la trasformazione lineare $T\colon V \to V$ definita da

$$T(v_1) = v_1 + v_3; \quad T(v_2) = v_1 + v_2; \quad T(v_3) = v_3$$

   (a) Determinare la matrice A_v associata a T rispetto alla base $\mathbf{v}$.

$$A_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Sia data la base $\mathbf{w} = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di V formata dai vettori

$$w_1 = v_2 + v_3, \quad w_2 = v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2.$$

   Determinare la matrice M_{wv} del cambiamento di base dalla base $\mathbf{w}$ alla base $\mathbf{v}$.

$$M_{wv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Determinare la matrice M_{vw} del cambiamento di base dalla base $\mathbf{v}$ alla base $\mathbf{w}$. Che relazione c'è tra M_{vw} ed M_{wv}?

   M_{vw} è la matrice inversa della matrice M_{wv}. Calcolando l'inversa si ottiene:

$$M_{vw} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Determinare la matrice A_w associata a T rispetto alla base $\mathbf{w}$. Che relazione c'è tra A_v ed A_w?

So che se un vettore X ha coordinate X_v rispetto alla base $\mathbf{v}$ e coordinate X_w rispetto alla base $\mathbf{w}$, allora abbiamo $M_{wv}X_w = X_v$. So inoltre che se $T(X) = Y$, allora devono valere $Y_v = A_vX_v$ e $Y_w = A_wX_w$. Allora

$$Y_w = M_{vw}Y_v = M_{vw}A_vX_v = M_{vw}A_vM_{wv}X_w$$

quindi la matrice associata a T rispetto alla base $\mathbf{w}$ è $A_w = M_{vw}A_vM_{wv} = M_{wv}^{-1}A_vM_{wv}$. Facendo i conti si ottiene:

$$A_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$