Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

II prova parziale/I appello – 16 giugno 2012

☐ **II prova parziale: svolgere gli esercizi 1, 2 e 3.**

☐ **I appello: svolgere gli esercizi 1, 2, 3, 4 e 5.**

* * *

Esercizio 1.

(a) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il vettore $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$.

(i) Trovare un sottospazio vettoriale V di dimensione 2 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su V sia $(1, 2, -1)$. Trovare una base ortonormale per V.

(ii) Sia W il sottospazio vettoriale di dimensione 1 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su W sia $(0, 1, 0)$. Calcolare $W^\perp$.

(b) Nello spazio $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale determinare, se esiste, un sottospazio T soddisfacente le condizioni seguenti: la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 6)$ su T è il vettore nullo e la proiezione ortogonale di $\mathbf{w} = (0, 1, 1, 0)$ su T è $(0, 0, 0, 1)$. Il sottospazio T è unico?

Esercizio 2. Nello spazio affine metrico usuale si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} 2y + z = 4 \\ 2x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2y - z = 10 \end{cases}.$$

(a) Determinarne la posizione reciproca.

(b) Determinarne la distanza ed i punti di minima distanza.

(c) Trovare un piano π che sia parallelo ad entrambe e da loro equidistante.

(d) Determinare la proiezione ortogonale di r su π.

Esercizio 3. Al variare del parametro k nei numeri reali, considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & k & 2k+1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}.$$

(a) Al variare di k, stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

(b) Nei casi in cui A_k è diagonalizzabile, trovare una base che la diagonalizza.

(c) Sia W la somma degli austospazi di A_k.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 2$? In caso affermativo, determinarli.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 1$? In caso affermativo, determinarli.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare

$$f\colon \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (2a_2,\ -a_0 + a_1 + a_2,\ a_0 - a_1 + 2a_2).$$

(a) Trovare la matrice associata ad f rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ ed alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base per $\ker f$ e completarla a base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

(c) Stabilire se f è suriettiva.

(d) Determinare l'antimmagine di $(1, 1, 1)$ e di $(2, 2, 1)$.

(e) Dato il sottospazio $W =< -1 - x^2,\ x - x^2 >$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$, determinare $W \cap \ker f$.

Esercizio 5. Scrivere il numero complesso $z = \frac{2^4(2+2i^5)}{(1-i)^5}$ nella forma $a + ib$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

II prova parziale/I appello – 16 giugno 2012

☐ **II prova parziale: svolgere gli esercizi 1, 2 e 3.**

☐ **I appello: svolgere gli esercizi 1, 2, 3, 4 e 5.**

* * *

Esercizio 1.

(a) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il vettore $\mathbf{v} = (2, 4, 2)$.

(i) Trovare un sottospazio vettoriale V di dimensione 2 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su V sia $(2, 1, -1)$. Trovare una base ortonormale per V.

(ii) Sia W il sottospazio vettoriale di dimensione 1 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su W sia $(0, 0, 1)$. Calcolare $W^{\perp}$.

(b) Nello spazio $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale determinare, se esiste, un sottospazio T soddisfacente le condizioni seguenti: la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (1, -2, 3, 6)$ su T è il vettore nullo e la proiezione ortogonale di $\mathbf{w} = (0, -1, 1, 0)$ su T è $(0, 0, 0, 1)$. Il sottospazio T è unico?

Esercizio 2. Nello spazio affine metrico usuale si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} x + 3y = 12 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} x - 3y = -6 \\ x - y - 2z = 6 \end{cases}.$$

(a) Determinarne la posizione reciproca.

(b) Determinarne la distanza ed i punti di minima distanza.

(c) Trovare un piano π che sia parallelo ad entrambe e da loro equidistante.

(d) Determinare la proiezione ortogonale di r su π.

Esercizio 3. Al variare del parametro k nei numeri reali, considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -k & 1-2k \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Al variare di k, stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

(b) Nei casi in cui A_k è diagonalizzabile, trovare una base che la diagonalizza.

(c) Sia W la somma degli austospazi di A_k.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 2$? In caso affermativo, determinarli.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 1$? In caso affermativo, determinarli.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare

$$f\colon \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_0 + a_1 - a_2,\ a_1 - a_2,\ -a_0 + a_1 - a_2).$$

(a) Trovare la matrice associata ad f rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ ed alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base per $\ker f$ e completarla a base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

(c) Stabilire se f è suriettiva.

(d) Determinare l'antimmagine di $(1, -1, 1)$ e di $(3, 1, 0)$.

(e) Dato il sottospazio $W =< -1 - x^2,\ x - x^2 >$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$, determinare $W \cap \ker f$.

Esercizio 5. Scrivere il numero complesso $z = -\frac{2^5(3+3i^5)}{(1-i)^5}$ nella forma $a + ib$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

II prova parziale/I appello – 16 giugno 2012

☐ **II prova parziale: svolgere gli esercizi 1, 2 e 3.**

☐ **I appello: svolgere gli esercizi 1, 2, 3, 4 e 5.**

* * *

Esercizio 1.

(a) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il vettore $\mathbf{v} = (1, 3, 1)$.

(i) Trovare un sottospazio vettoriale V di dimensione 2 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su V sia $(1, 2, -1)$. Trovare una base ortonormale per V.

(ii) Sia W il sottospazio vettoriale di dimensione 1 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su W sia $(0, 1, 0)$. Calcolare $W^{\perp}$.

(b) Nello spazio $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale determinare, se esiste, un sottospazio T soddisfacente le condizioni seguenti: la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (3, 2, 1, 6)$ su T è il vettore nullo e la proiezione ortogonale di $\mathbf{w} = (1, 1, 0, 0)$ su T è $(0, 0, 0, 1)$. Il sottospazio T è unico?

Esercizio 2. Nello spazio affine metrico usuale si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} -y + 2z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} x + 2z = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinarne la posizione reciproca.

(b) Determinarne la distanza ed i punti di minima distanza.

(c) Trovare un piano π che sia parallelo ad entrambe e da loro equidistante.

(d) Determinare la proiezione ortogonale di r su π.

Esercizio 3. Al variare del parametro k nei numeri reali, considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -k & 1 \\ 1 & 2k+1 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Al variare di k, stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

(b) Nei casi in cui A_k è diagonalizzabile, trovare una base che la diagonalizza.

(c) Sia W la somma degli austospazi di A_k.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 2$? In caso affermativo, determinarli.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 1$? In caso affermativo, determinarli.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare

$$f\colon \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1,\ -a_0 + a_1 - a_2,\ -2a_0 + 3a_1 - 2a_2).$$

(a) Trovare la matrice associata ad f rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ ed alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base per $\ker f$ e completarla a base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

(c) Stabilire se f è suriettiva.

(d) Determinare l'antimmagine di $(1, 0, 1)$ e di $(1, 4, 0)$.

(e) Dato il sottospazio $W =< -1 - x,\ x + x^2 >$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$, determinare $W \cap \ker f$.

Esercizio 5. Scrivere il numero complesso $z = -\frac{2^6(2+2i^7)}{(1+i)^7}$ nella forma $a + ib$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

II prova parziale/I appello – 16 giugno 2012

☐ **II prova parziale: svolgere gli esercizi 1, 2 e 3.**

☐ **I appello: svolgere gli esercizi 1, 2, 3, 4 e 5.**

* * *

Esercizio 1.

(a) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il vettore $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$.

(i) Trovare un sottospazio vettoriale V di dimensione 2 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su V sia $(2, 1, 1)$. Trovare una base ortonormale per V.

(ii) Sia W il sottospazio vettoriale di dimensione 1 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su W sia $(0, 0, 1)$. Calcolare $W^{\perp}$.

(b) Nello spazio $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale determinare, se esiste, un sottospazio T soddisfacente le condizioni seguenti: la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (3, -2, 1, 6)$ su T è il vettore nullo e la proiezione ortogonale di $\mathbf{w} = (1, -1, 0, 0)$ su T è $(0, 0, 0, 1)$. Il sottospazio T è unico?

Esercizio 2. Nello spazio affine metrico usuale si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} x - z = -1 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 3x + y = 7 \\ y + 3z = 4 \end{cases}.$$

(a) Determinarne la posizione reciproca.

(b) Determinarne la distanza ed i punti di minima distanza.

(c) Trovare un piano π che sia parallelo ad entrambe e da loro equidistante.

(d) Determinare la proiezione ortogonale di r su π.

Esercizio 3. Al variare del parametro k nei numeri reali, considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 1-2k & -k \end{pmatrix}.$$

(a) Al variare di k, stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

(b) Nei casi in cui A_k è diagonalizzabile, trovare una base che la diagonalizza.

(c) Sia W la somma degli austospazi di A_k.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 2$? In caso affermativo, determinarli.
Esistono valori di k per cui si abbia $\dim W = 1$? In caso affermativo, determinarli.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare

$$f\colon \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2,\ 2a_1 + 2a_2,\ a_0 - a_1 - a_2).$$

(a) Trovare la matrice associata ad f rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ ed alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base per $\ker f$ e completarla a base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

(c) Stabilire se f è suriettiva.

(d) Determinare l'antimmagine di $(0, 2, -2)$ e di $(3, 2, 0)$.

(e) Dato il sottospazio $W =< -1 - x^2,\ x + x^2 >$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$, determinare $W \cap \ker f$.

Esercizio 5. Scrivere il numero complesso $z = \frac{2^3(-3-3i^3)}{(1+i)^3}$ nella forma $a + ib$.