Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

II prova parziale/I appello – 16 giugno 2012

☐ **II prova parziale: svolgere gli esercizi 1, 2 e 3.**

☐ **I appello: svolgere gli esercizi 1, 2, 3, 4 e 5.**

* * *

Esercizio 1. Nello spazio affine metrico usuale si considerino le due rette
a) Se i due piani non sono paralleli (e non lo sono: le giaciture non sono parallele), il fascio é proprio di sostegno la retta

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

ottenendo la retta $(0, -2, 5)+ < (1, 0, -1) >$.Quindi fascio proprio di sostegno tale retta.
b)Al variare di h si ha $(x+z-2)+h(y) = 0$ é quindi il fascio individuato dai due piani $y = 0$ e $x+z-2 = 0$, cioé dai piani per la retta loro intersezione, data da $(2, 0, 0)+ < (1, 0, -1) >$. Ora non sono tutti i piani perché manca il piano $y = 0$ che non si puó trovare per alcuna scelta di h.
c) Il vettore $((1, 2, 1)$ é ortogonale al piano α. La retta per P e perpendicolare a α é data da $(-1, 0, 1)+ < (1, 2, 1) >$, ed in coordinate parametriche $(-1 + t, 2t, 1 + t)$, $t\mathbb{R}$. Il punto in comune M con il piano α deve soddisfare $(-1 + t) + 2(2t) + (1 + t) = 1$ dunque $t = \frac{1}{6}$. Trovando $M = (-\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{7}{6})$. tale punto è il punto medio tra il simmetrico cercato P' e P, con P' sempre sulla stessa retta. Cioé cerchiamo t tale che $\frac{1}{2}[(-1, 0, 1) + (-1 + t, 2t, 1 + t)] = (-\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{7}{6})$. Ottenendo $t = \frac{1}{3}$.
d) I tre piani appartengono allo stesso fascio: se sono paralleli(ma questo non è il caso), oppure hanno tutti in comune una stessa retta. Cioé se condideriamo la matrice che si ottiene dalle loro equazioni si deve avere

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Lasciamo la discussione come esercizio di routine con la sola soluzione $h = \frac{3}{2}/$
e) Le rette intersezione dei piani α e γ_h sono

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + hy + z = 2 \end{cases}$$

risultano quindi delle rette di giacitura pari a $< (1, 0, -1) >$ salvo il caso $h = 2$ dove l'intersezione è vuota. Lo stesso accade per β e γ_h in questo caso il valore di h da evitare è -1. quindi per $h \neq -1, 2$ sono sempre rette parallele.

Esercizio 2.
a) Per $k = 0$ la matrice é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

il suo polinomio caratteristico è $(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$. Si vede subito che la molteplicitá geometrica di -1 è uno: in quanto è il rango di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che é 2. quindi non é diagonalizzabile.
b) La matrice ammette autovalore 1 se il rango della matrice secolare (quella per calcolare il polinmio caratteristico) con 1 al posto di λ non e' massimo (i.e. pari a 3). La matric e è allora

$$\begin{pmatrix} -1 & 1+2k & 2 \\ 1 & -2k-1 & 0 \\ 1 & 1 & -2k-1 \end{pmatrix}$$

Si vede che il rango non é massimo per $k = -1$. Lasciamo quindi allo studente di sostituire takle valore alla matrice e di verificare la diagonalizzabilitá. É diagonalizzabile avendo 3 autovalori diversi.
Esercizio 4.
a+b) $Kerf$ é dato dall'equazione $x - 2y + z = 0$ quindi dallo spazio $< (2,1,0), (1,0,-1) >$, il vettore $(0,1,0)$ non vi appartiene . quindi abbiamo le immagini dei vetttori di una base di $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = (2,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), \mathbf{v}_3 = (0,1,0)$. La applicazione esiste ed é unica. Rispetto a tale base nel dominio e alla canonica del codominio la matrice é

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice dalla base canonica alla base $\mathbf{v}$ é

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice cercata è quindi TS^{-1}. Si noti che l'immagine ha dimensione 1 ed è uguale ad $Imf =< 0,1,3,0) >$. Non appena un vettore non appartiene al ker allora la sua immagine genera tutta l'immagine dell'applicazione.
c) Si vede subito che W non è contenuto nel ker ha quindi un vettore che non gli appartiene. Ne segue che la sua immagine é tutta l'immagine di f.
d) Per quanto detto prima l'affermazione è vera. Non appena T non é contenuto in $Kerf$ la sua immagine è tutto Imf.

Esercizio 5. . L'equazione $z + i\overline{z}^2 = -2i$ si puó scrivere prendendo l scrittura $z = a + ib$ ove a, b sono numeri reali. Allora abbiamo $(a + ib) + i(a - ib)^2 = -2i$. quindi $a + ib + i(a^2 - b^2 + 2iba) = -2i$, e in seguito $(a - 2ab) + i(a^2 - b^2 + b) = -2i$, Cioé a, b reali debbono soddisfare contemporaneamente $a - 2ab = 0$ e $a^2 - b^2 + b = -2$. Dalla prima abbiamo $a = 0$ oppure $b = \frac{1}{2}$. Se $a = 0$ allora, $b = -1, 2$. Dunque le soluzioni sono $z = -i$ oppure $z = 2i$. Nel primo caso la scrittura é $(cos\frac{3}{4}\pi, sen\frac{3}{4}\pi)$, nel secondo $2(cos\frac{1}{4}\pi, sen\frac{1}{4}\pi)$. L'altra soluzione $b = \frac{1}{2}$, non porta alcuna soluzione poiché il quadrato di a é positivo e non puó essere uguale ad un numero negativo.