Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(primo appello/II prova 15/6/2015 - Chiarellotto-Mistretta)

Rispondere necessariamente ai seguenti quesiti con vero o falso e giustificando le risposte (non dovute per II prova)

1) Matrici quadrate con tutte le entrate diverse da zero sono sempre invertibili. vero o falso? falso, Devono avere righe (colonne) lin.ind. esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha det =0.

2). Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione. Vero o falso? Vero: ha sempre la soluzione nulla.

3) Ogni matrice simmetrica ad entrate in $\mathbb{R}$ è diagonalizzabile.. Vero o falso? Vero: è il risultato fondamentale del ns corso. É addirittura ortogonalmente diagonalizzabile.

Esercizio 1. Nello spazio tridimensionale euclideo usuale, si considerino la retta r

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

e la retta t data da $(0,1,0)+ < (0,1,1) >$.

a) Determinare la posizione reciproca e la loro distanza.

b) Determinare due punti $R \in r$ e $S \in s$ di minima distanza. Determinare l'asse del segmento individuato da R e S cioè l'insieme dei punti dello spazio equidistanti da R e S.

c) Determinare (se possibile) tutti i triangoli equilateri aventi due vertici in R e S e il terzo sulla retta

$$\begin{cases} x - y - z = -5 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

-qui risulta che r e t sono $(1,0,1)+ < (1,1,0) >$ e $(0,1,0)+ < (0,1,1) >$. Si vede subito che i tre vettori $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,-1,1)$ (quest'ultimo il vettore tra due punti uno su r e uno su t $(1,0,1)-(0,1,0)$) sono lin. ind. quindi le due rette sono sghembe. Uno potrebbe vedere subito i punti di minima distanza che sono collegati ai punti della retta r: $(1+\alpha, \alpha, 1)$ e di t: $(0, 1+\beta, \beta)$ per cui il vettore che li collega $(1+\alpha, \alpha-\beta, 1-\beta)$ è ortogonale ai due vettori direzione $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$.

$$\begin{cases} (1+\alpha, \alpha-\beta, 1-\beta) \bullet (1,1,0) = 0 \\ (1+\alpha, \alpha-\beta, 1-\beta) \bullet (0,1,1) = 0 \end{cases}$$

Si trovano quindi $R = (1,0,1)$ e $S = (0,1,0)$. Ne deriva che la distanza è $||(1,-1,1)|| = \sqrt{3}$. L'asse è individuato dal piano che passa per il punto medio del segmento individuato da R e S e che ha giacitura ortogonale al vettore ortogonale alla giacitura delle dure rette (oppure dalla giacitura data dalla somma della giacitura delle dure rette). Il vettore ortogonale è $(1,-1,1)$ e quindi la giacitura del piano è $x - y + z = \epsilon$. Il punto medio è $M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e quindi il piano è $x - y + z = \frac{1}{2}$ (oppure $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})+ < (1,1,0), (0,1,1) >$). Ora: tale piano ha la proprietá che ogni suo punto è equidistante da R e S cioè forma un triangolo isoscele (....anzi tutti i triangoli isosceli con base R e S sono su quel piano.....).

La richiesta del problema è trovare un punto della retta (che indichiamo con l) che fornisca un triangolo equilatero con R e S. Quindi necessariamente tale punto deve stare sull'asse (un triangolo equilatero è isoscele) e sulla retta l: ma la retta e il piano hanno **un solo punto in comune !!**: trovarlo e verificare che dista da R o da S diversamente da $\sqrt{3}$..necessario per avere un equilatero.quindi non esiste.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti matrici in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori e autospazi di B e C. Dire se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

b) Al variare di a in $\mathbb{R}$ si determino autovalori e autospazi di A. Per quali valori di a la matrice è diagonalizzabile.

c) Determinare i valori del parametro a per cui A è simile a C e trovare una matrice invertibile H tale che $C = H^{-1}AH$.

d) Per quali valori del parametro A è simile a B? (suggerimento: esiste una matrice diagonale D tale che $AD = DB$...)

Soluzione Si consideri B ha come polinomio caratteristico: $(1-\lambda)^2(3-\lambda)$: autospazio relativo a 1: $< (0,0,1) >$ e relativo a 3: $< (2,0,1) >$. Non è diagonalizzabile. La matrice C invece ha lo stesso polinomio caratteristico ma autospazi : relativo a 1: $< ((2,-1,0),(0,0,1) >$, mentre per 3: $< (0,1,0) >$ ed è diagonalizzabile. Non sono simili. Per quanto riguarda A: ha sempre lo stesso polinomio caratteristico $(1-\lambda)^2(3-\lambda)$. Il problema della diagonalizzazione è legato ad 1: l'autospazio relativo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & a & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

per cui autospazio deve avere dimensione 2: e quindi rango della matrice è uguale a 1. cioè $a = 0$. Ne deriva che A è simile ad C per $a = 0$ perchè sono ambedue diagonalizzabili con polinomio caratteristico uguale. quindi esiste una matrice invertibile di autovettori H tale che

$$H^{-1}CH = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cosí come per A (con $a = 0$): K di autovettori

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $H^{-1}CH = K^{-1}AK$, ne segue: $C = HK^{-1}AKH^{-1}$. Quindi la matrice cercata è KH^{-1}. La matrice H è

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per K (il vettore $(2,0,1)$ è l'autospazio relativo a 3...)

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi
$V = x + y = 0$ and $W =< (2,-2,1),(1,1,3) >$

a) Determinare un sistema che abbia W come soluzioni. Determinare l'intersezione tra $V \cap W$.

b) Trovare una base ortonormale di V. Determinare la proiezione ortogonale di $(1,1,3)$ su V e su W.

c) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno la stessa proiezione ortogonale di $(1,1,3)$ su V. Sono soluzioni di un sistema lineare? Trovarlo.

Soluzione: Possiamo prendere

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cioè $7x + 5y - 4z = 0$. V ha come base (ad esempio): $(1, -1, 0), (0, 0, 1)$. Applicando G-S: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1)$. La prioezione ortogonale su V di

$(1, 1, 3)$ è $(1, 1, 3)_{//} = [(1, 1, 3) \bullet (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)](\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + [(1, 1, 3) \bullet (0, 0, 1)](0, 0, 1)] = (0, 0, 3)$. Mentre per l'altra proiezione troviamo la proiezione sulla componente ortogonale avendo l'equazione: quindi il vettore ortogonale è $\frac{1}{\sqrt{90}}(7, -5, 4) = \omega$. Quindi $(1, 1, 3)_{\perp} = [(1, 1, 3) \bullet \omega]\omega$ e la proiezione cercata è $(1, 1, 3) - (1, 1, 3)_{\perp}$. i vettori che hanno la stessa proiezione ortogonale di $(1, 1, 3)$ su V sono quelli che si ottengono sommando a $(1, 1, 3)$ un vettore ortogonale a V. Ma tali vettori sono tutti mutipli di $(1, 1, 0)$ (che è collegato alla sua equazione $x+y = 0$). Quindi $(1, 1, 3)+ < (1, 1, 0) >$. Dunque le soluzioni sono del tipo $(1 + t, 1 + t, 3)$. I.e. $x = 1 + t, y = 1 + t, z = 3$ cioè

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

FINE PROVA PARZIALE.

Esercizio 4. Let $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

a) Determinare la matrice associata alle base canoniche della applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ per cui $f(1, 0, 0, 0) = (2, 1)$, $f(0, 1, 0, 0) = (3, 4)$, $f(0, 0, 1, 0) = (1, 3)$ e $f(1, 1, 1, 1) = (1, 4)$. Determinare il suo nucleo e la sua immagine.

b) Si consideri il sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ dato dai vettori (x, y, z, t) tali che

$$\begin{cases} x + y + 2t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

Determinare $T \cap kerf$.

c) Determinare un sottospazio L tale che $L \oplus kerf = L \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Soluzione. É vero che $(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ sono uan base di $\mathbb{R}^4$: quindi abbiamo tutte le informazioni per avere una unica applicazione lineare. Noto che $(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 1) - (1, 0, 0, 0) - (0, 1, 0, 0) - (0, 0, 1, 0)$ quindi se deve essere lineare $f(0, 0, 0, 1) = f(1, 1, 1, 1) - f(1, 0, 0, 0) - f(0, 1, 0, 0) - f(0, 0, 1, 0)$. Abbiamo quindi $f(0, 0, 0, 1) = (3, 4) - (2, 1), -(3, 4) - (1, 3) = (-5, -4)$. La matrice della applicazione è

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

ha rango due: quindi Im è tutto $\mathbb{R}^2$, il Ker è collegato alle souzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione uno spazio di dimensione 2: forma a scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

quindi: $< (1, -1, 1, 0), (8, 3, 0, 5) >$. Quindi i suoi vettori sono $(\alpha + 8\beta, -\alpha + 3\beta, \alpha, 5\beta)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Li possiamo mettere nel sistema che caratterizza T:

$$\begin{cases} (\alpha + 8\beta) + (-\alpha + 3\beta) + 2(5\beta) = 0 \\ (\alpha + 8\beta) + 2(-\alpha + 3\beta) + (\alpha) - (5\beta) = 0 \end{cases}$$

Ottengo dalle due equazioni $11\beta = 0, 9\beta = 0$ quindi $\beta = 0$ e quindi l'intersezione è data da $< (1, -1, 1, 0) >$.

Per l'ultimo quesito occorre dare una descrizione vettoriale di T i.e. trovarne una base delle soluzioni: risolvendo il sistema si trova $< (1, -1, 1, 0), (0, -2, 5, 1) >= T$. Per Trovare L come voluto si debbono trovare $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ in modo che le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

abbiano determinante diverso da zero. Si vede subito che la scelta $(0, 1, 0, 0) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $(1, 0, 0, 0) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, va bene. Ma anche $(0, 0, 1, 0) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $(0, 0, 0, 1) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ....

Esercizio 5. Nel corpo dei complessi $\mathbb{C}$

a) trovare tutte le soluzioni e scriverle in forma trigonometrica di $(z)^4 = \frac{3}{1-i}$.

b) Trovare tutte le soluzioni di $z^2 + 3iz + 4 = 0$

Soluzione. Moltiplico $\frac{3}{1-i}$ a denominatiore e numeratore per $1+i$. Trovo $\frac{3}{2}(1+i)$. Trovo la forma trigonometrica: $\rho(cos\theta, sen\theta)$ $(\rho > 0!!!)$ per $(1+i) = \frac{2}{\sqrt{2}}(cos\frac{\pi}{4}, sen\frac{\pi}{4})$. Dunque per $\frac{3}{2}(1+i)$ si ha: $\frac{3}{\sqrt{2}}$ e angolo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5......$ Quindi il nostro z che ha modulo ρ e argomento θ è tale che $\rho^4 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ e $4\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, 3$. Ottenendo per il modulo la radice quarta di $\frac{3}{\sqrt{2}}$ e per l'angolo $\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}$.

L'equazione di secondo grado si risolve come per una a coefficienti reali ricordando che $i^2 = -1$. Quindi

$$\frac{-3i + \sqrt{(3i)^2 - 4(4)}}{2} \qquad \frac{-3i - \sqrt{(3i)^2 - 4(4)}}{2}$$

quindi

$$\frac{-3i + \sqrt{-9 - 16}}{2} \quad \frac{-3i - \sqrt{-9 - 16}}{2}$$

Ottenendo le due soluzioni: $\frac{1}{2}(-3i + 5i) = i$ e $\frac{1}{2}(-3i - 5i) = -4i$.