Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

**I prova parziale— 5 maggio 2012**

---

Dire se è vero o falso:
a) Ogni matrice quadrata è invertibile.
b) Tre vettori sono linearmente dipendenti se nessuno tra loro è il vettore nullo.
c) Vi sono sistemi lineari non omogenei con solo due vettori come soluzione.

* * *

**Esercizio 1.** Al variare di $k$ nei numeri reali si consideri il sistema lineare nelle incognite $(x, y, z)$

$$\begin{cases} (k-1)x + y + z = 1 \\ x + (k-1)y + z = 1 \\ x + y + (k-1)z = 1 \end{cases}$$

(a) Dire per quali valori di $k$ si ha una e una sola soluzione.

(b) Dire per quali valori di $k$ si hanno più soluzioni e determinarle.

(c) Per i valori di $k$ per cui si ha una sola soluzione, trovarla.

**Esercizio 2.** Sia $T \leq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 1, 2)$, $v_2 = (3, 0, 0, -1)$. Sia $S$ il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite $(x, y, z, w)$ delle equazioni

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di $S$ e trovarne una base.

(b) Dare una base di $S + T$.

(c) Trovare un sistema che abbia come soluzione $T$.

(d) Determinare $T \cap S$.

**Esercizio 3.**

(a) Determinare un endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ che abbia come $ker f =< (1, 1, 0) >$ e $Im f =< (0, 1, -1), (2, 1, 2) >$. Tale $f$ è unica? Perché?

(b) Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(c) Per la $f$ di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1, 1, 1)$ e di $(2, 2, 1)$.

**Esercizio 4.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino gli autovalori di $A$ e, per ciascun autovalore, si calcoli una base dell'autospazio corrispondente.

(b) Si verifichi che gli autospazi sono in somma diretta.

(c) Si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga le basi trovate per gli autospazi.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

**I prova parziale— 5 maggio 2012**

---

Dire se è vero o falso:
a) Ogni matrice triangolare superiore è invertibile.
b) Tre vettori sono linearmente dipendenti se sono tutti diversi tra loro.
c) Vi sono sistemi lineari omogenei con solo due vettori come soluzione.

* * *

**Esercizio 1.** Al variare di $k$ nei numeri reali si consideri il sistema lineare nelle incognite $(x, y, z)$

$$\begin{cases} (k+1)x + y + z = 1 \\ x + y + (k+1)z = 1 \\ x + (k+1)y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Dire per quali valori di $k$ si ha una e una sola soluzione.

(b) Dire per quali valori di $k$ si hanno più soluzioni e determinarle.

(c) Per i valori di $k$ per cui si ha una sola soluzione, trovarla.

**Esercizio 2.** Sia $T \leq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (0, 1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$. Sia $S$ il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite $(x, y, z, w)$ delle equazioni

$$\begin{cases} z - w = 0 \\ x + y - 2w - 2z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di $S$ e trovarne una base.

(b) Dare una base di $S + T$.

(c) Trovare un sistema che abbia come soluzione $T$.

(d) Determinare $T \cap S$.

**Esercizio 3.**

(a) Determinare un endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ che abbia come $ker f =< (0, 1, 1)) >$ e $Im f =< (1, 1, 1), (2, 0, 1)) >$. Tale $f$ è unica? Perché?

(b) Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(c) Per la $f$ di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1, -1, 1)$ e di $(3, 1, 0)$.

**Esercizio 4.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino gli autovalori di $A$ e, per ciascun autovalore, si calcoli una base dell'autospazio corrispondente.

(b) Si verifichi che gli autospazi sono in somma diretta.

(c) Si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga le basi trovate per gli autospazi.

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola __________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

**I prova parziale— 5 maggio 2012**

---

Dire se è vero o falso:
a) Ogni matrice quadrata ha determinante diverso da zero.
b) Tre vettori sono linearmente dipendenti se lo spazio da loro generato ha dimensione 2.
c) Vi sono sistemi lineari omogenei senza nessuna soluzione.

* * *

**Esercizio 1.** Al variare di $k$ nei numeri reali si consideri il sistema lineare nelle incognite $(x, y, z)$

$$\begin{cases} (k-2)x + y + z = 1 \\ x + (k-2)y + z = 1 \\ x + y + (k-2)z = 1 \end{cases}$$

(a) Dire per quali valori di $k$ si ha una e una sola soluzione.

(b) Dire per quali valori di $k$ si hanno più soluzioni e determinarle.

(c) Per i valori di $k$ per cui si ha una sola soluzione, trovarla.

**Esercizio 2.** Sia $T \leq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2, 1)$. Sia $S$ il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite $(x, y, z, w)$ delle equazioni

$$\begin{cases} y - w = 0 \\ 2x - y - z - 2w = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di $S$ e trovarne una base.

(b) Dare una base di $S + T$.

(c) Trovare un sistema che abbia come soluzione $T$.

(d) Determinare $T \cap S$.

**Esercizio 3.**

(a) Determinare un endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ che abbia come $ker f =< (-1, 0, 1) >$ e $Im f =< (0, 1, 2), (1, 1, 3) >$. Tale $f$ è unica? Perché?

(b) Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(c) Per la $f$ di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1, 0, 1)$ e di $(1, 4, 0)$.

**Esercizio 4.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino gli autovalori di $A$ e, per ciascun autovalore, si calcoli una base dell'autospazio corrispondente.

(b) Si verifichi che gli autospazi sono in somma diretta.

(c) Si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga le basi trovate per gli autospazi.

Cognome ____________________________ Nome ____________________________ Matricola ______________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

CHIARELLOTTO, GARUTI, NOVELLI

**I prova parziale— 5 maggio 2012**

---

Dire se è vero o falso:
a) Ogni matrice in forma ridotta a scalini per righe è invertibile.
b) Tre vettori sono linearmente dipendenti solo se lo spazio da loro generato ha dimensione 1.
c) Se $v$ é soluzione di un sistema omogeneo allora anche $-v$ é soluzione.

* * *

**Esercizio 1.** Al variare di $k$ nei numeri reali si consideri il sistema lineare nelle incognite $(x, y, z)$

$$\begin{cases} (k+2)x + y + z = 1 \\ x + y + (k+2)z = 1 \\ x + (k+2)y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Dire per quali valori di $k$ si ha una e una sola soluzione.

(b) Dire per quali valori di $k$ si hanno più soluzioni e determinarle.

(c) Per i valori di $k$ per cui si ha una sola soluzione, trovarla.

**Esercizio 2.** Sia $T \leq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (0, -1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1, 1)$. Sia $S$ il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite $(x, y, z, w)$ delle equazioni

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - z - 2w = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di $S$ e trovarne una base.

(b) Dare una base di $S + T$.

(c) Trovare un sistema che abbia come soluzione $T$.

(d) Determinare $T \cap S$.

**Esercizio 3.**

(a) Determinare un endomorfismo $f$ di $\mathbb{R}^3$ che abbia come $ker f =< (0, -1, 1) >$ e $Im f =< (1, 2, -1), (1, 0, 1) >$. Tale $f$ è unica? Perché?

(b) Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(c) Per la $f$ di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(0, 2, -2)$ e di $(3, 2, 0)$.

**Esercizio 4.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcolino gli autovalori di $A$ e, per ciascun autovalore, si calcoli una base dell'autospazio corrispondente.

(b) Si verifichi che gli autospazi sono in somma diretta.

(c) Si scriva una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga le basi trovate per gli autospazi.