Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti, Novelli

II appello— 4 luglio 2012

---

* * *

Esercizio 1.

(a) Nello spazio $\mathbf{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio V dato dall'equazione $3x - 2y - 5z = 0$. Trovare una sua base e una sua base ortonormale.

(b) Si determini la proiezione ortogonale di $(1, 3, 7)$ su V.

(c) Si determini un sottospazio S addendo diretto di V, $\mathbf{R}^3 = V \oplus S$, con S non ortogonale a V.

(d) Si determini la proiezione su V lungo S di $(1, 3, 7)$.

(e) Determinare un sottospazio L, $\mathbf{R}^3 = V \oplus L$ tale che la proiezione si $(1, 1, 1)$ su V lungo L sia $(2, 3, 0)$.

Esercizio 2. Nello spazio affine metrico usuale si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} x + 2y - 2z = 6 \\ 3x + 2z = 8 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare posizione reciproca.

(b) Determinare la loro distanza e dei punti $P \in r$ e $Q \in s$ di minima distanza.

(c) Verificare che il piano π di euqazione $5x + y + 2z - 10 = 0$ contiene la retta s. Determinare un piano per r ortogonale a π.

(d) Verificare che per ogni piano π per s ne esiste uno ortogonale ad esso e contenente r

(e) L'asserzione (d) vale per due rette qualsiasi sia la loro posizione reciproca?.

Esercizio 3. Si consideri la matrice al variare di k nei reali data da

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 0 \\ 1 & k-1 & k \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di k si determini il rango della matrice.

(b) Interpretando la matrice come la matrice associata ad una applicazione lineare f_k , si dica qual e' la dimensione del dominio e del codominio. SI dica per quali k la applicazione é iniettiva e quando é suriettiva.

(c) Per quali valori di k il vettore $(0, 1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di f_k?

(d) Per ogni f_k determinare l'antimmagine del vettore $(0, k, 0, k)$.

Esercizio 4. Nello spazio reale tridimensionale.

(a) Determinare se, esiste, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia come $ker f =< (1,1,0) >$ e le immagine di $(1,1,1)$ é $(1,1,1)$ e l'immagine di $(0,0,2)$ é $(2,1,6)$. In caso se ne dia la matrice associata alla basi canoniche. Trovarne autovalori e dire se é diagonalizabile.

(b) Determinare un endomorfismo g tale che l'immagine di $(1,1,1)$ sia se stesso, $g(2,0,1) = (3,-1,1)$, $g(1,2,0) = (1,3,-1)$. Se ne dia la matrice associata alla base canonica. Dire se e' diagonalizzabile e trovarne gli autovalori.

(c) Per la g di cui al punto (b) determinare una matrice ortogonale che la diagonalizzi.

Esercizio 5. Un esercizio molto breve sui numeri complessi.