Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Esposito, Garuti

Prova del 21 settembre 2013

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) Il *ker* di un'applicazione lineare é un sottospazio del codominio.

b) Un sistema lineare omogeneo ha sempre un numero infinito di soluzioni.

c) Il rango di una matrice é il numero massimo di entrate diverse da zero.

* * *

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi $U =< (1, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 3) >$ e $T =< (1, 0, 1, 0), (1, 2, 2, 5) >$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di $V = U \cap T$ ed una di $U + T = S$. La somma è diretta?

Svolgimento: Per trovare $U \cap T$ si imposta l'equazione vettoriale

$$a(1, 1, 1, 2) + b(0, 1, 1, 3) = c(1, 0, 1, 0) + d(1, 2, 2, 5).$$

Questa equazione si traduce in un sistema di 4 equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$\begin{cases} a & & & = & c & + & d \\ a & + & b & = & & + & 2d \\ a & + & b & = & c & + & 2d \\ 2a & + & 3b & = & & + & 5d. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda alla terza equazione si ottiene $c = 0$; dalla prima si ha $a = d$ e dalla terza si ha $b = d$; la quarta equazione si riduce a $5d = 5d$. Dunque le soluzioni di questo sistema sono del tipo $(d, d, 0, d)$, con d un numero reale arbitrario; ossia sono tutte multiple di $(1, 1, 0, 1)$. Si deduce che una base di $U \cap T$ è ad esempio il vettore ottenuto ponendo $a = 1, b = 1$ (oppure $c = 0, d = 1$), ossia $(1, 2, 2, 5)$: $U \cap T =< (1, 2, 2, 5) >$.

Per ottenere una base di $U + T$ è sufficiente estrarre dall'insieme di generatori

$\{(1, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 3), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 2, 5)\}$ di $U+T$ un sottoinsieme linearmente indipendente massimale. Ad esempio si possono prendere i vettori $(1, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 3), (1, 0, 1, 0)$, dato che i primi due vettori formano una base di U e che il terzo non appartiene a U.

La somma $U + T$ non è diretta poichè l'intersezione $U \cap T$ non è il sottospazio nullo.

b) Trovare un sistema che abbia S come soluzione.

Svolgimento: Per trovare un sistema di equazioni lineari omogenee che abbia come soluzione il sottospazio S cerchiamo le equazioni lineari nelle variabili x, y, z, w del tipo $ax + by + cz + dw = 0$ che sono soddisfatte se si sostituiscono alle variabili le coordinate dei vettori di una base di S. Una base di S è ad esempio $\{(1, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 3), (1, 0, 1, 0)\}$; dunque si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b, c, d:

$$\begin{cases} a & + & b & + & c & + & 2d & = & 0 \\ & & b & + & c & + & 3d & = & 0 \\ a & & & + & c & & & = & 0. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima si ottiene $a-d = 0$, dalla terza si ha $a = -c$; sostituendo nella seconda equazione $c = -a$ e $d = a$ si ottiene $b = -2a$. Dunque le soluzioni di questo sistema sono della forma $(a, -2a, -a, a)$, ossia formano uno spazio vettoriale di dimensione 1 generato ad esempio dal vettore $(1, -2. -1, 1)$. Quindi le equazioni lineari omogenee nelle variabili x, y, z, w che si annullano sul sottospazio S sono tutte multiple dell'equazione $x - 2y - z + w = 0$; il sottospazio S è definito dall'equazione $x - 2y - z + w = 0$.

c) Determinare, se esiste, un sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = S$.

Svolgimento: Poichè $dimS = 3$ *e* $dimU = 2$, *si avrà* $dimL = 1$; *dunque* L *sarà generato da un vettore* v *contenuto in* S *ma non contenuto in* U. *Poiché sappiamo che una base di* S *è* $\{(1,1,1,2),(0,1,1,3),(1,0,1,0)\}$ *e che una base di* U *è* $\{(1,1,1,2),(0,1,1,3)\}$, *possiamo prendere ad esempio per vettore* v *il vettore* $(1,0,1,0)$: $L =< (1,0,1,0) >$ *(questa non è l'unica scelta possibile per il sottospazio* L*).*

d) Determinare, se esiste, un sottospazio $L' \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = L' \oplus T = \mathbb{R}^4$. *Svolgimento: Poiché* $dim(L+U) = dim(S) = 3$ *e* $dim\mathbb{R}^4 = 4$, *non può esistere un sottospazio* L' *tale che* $L \oplus U = L' \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ siano dati gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$, $f_a(x,y,z) = (ax, x+y+az, z)$

a) Dare la matrice di f_a rispetto alla base canonica.

Svolgimento: La matrice di f_a *rispetto alla base canonica avrà come colonne i vettori* $f_a(1,0,0)$, $f_a(0,1,0)$, $f_a(0,0,1)$. *Si ha* $f_a(1,0,0) = (a,0,0)$, $f_a(0,1,0) = (0,1,0)$, $f_a(0,0,1) = (0,a,1)$; *dunque la matrice* F_a *associata ad* f_a *rispetto alla base canonica è*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Per quali valori di a f_a non é iniettivo? Per tali valori determinare il Ker. Vi sono altri valori di a dove f_a ammette ker non nullo?

Svolgimento: Una applicazione lineare non è iniettiva se e solo se il suo nucleo è diverso dal sottospazio nullo. Dunque calcoliamo $Ker(f_a)$. *Il sottosdpazio* $Ker(f_a)$ *è definito dal sistema*

$$\begin{cases} ax & & & = & 0 \\ & y & + & az & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{cases}.$$

Per $a \neq 0$, *l'unica soluzione di questo sistema è* $(0,0,0)$, *dunque* $Ker(f_a) = 0$ *per* $a \neq 0$. *Per* $a = 0$, *le soluzioni di questo sistema sono della forma* $(x,0,0)$, *dunque* $Ker(f_0) =< (1,0,0) >$. *Si deduce che* f_a *è iniettiva per* $a \neq 0$ *e che* f_0 *non è iniettiva.*

c) Al variare di a dire se l'applicazione lineare f_a é diagonalizzabile e trovare una base che diagonalizzi.

Svolgimento: Notiamo che l'applicazione f_0 *è diagonalizzabile poiché la matrice di* f_0 *rispetto alla base canonica è diagonale. Calcoliamo il polinomio caratteristico, gli autovalori ed i relativi autospazi dell'applicazione* f_a. *Si ha*

$$P_{f_a}(\lambda) = Det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

dunque $P_{f_a}(\lambda) = (a-\lambda)(1-\lambda)^2$ *(il determinante di una matrice triangolare superiore è il prodotto dei termini sulla sua diagonale). Si deduce che per* $a \neq 1$, f_a *ha autovalori a e 1, di molteplicità algebrica 1 e 2 rispettivamente; mentre* f_1 *ha autovalore 1 di molteplicità algebrica 3. Una applicazione lineare è diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico ha tutte radici reali e per ogni autovalore* λ, *la sua molteplicità geometrica è uguale alla sua molteplicit''a algebrica. Poiché la molteplicit''a geometrica è sempre maggiore o guale a 1 e minore o uguale alla molteplicit''a algebrica, per gli autovalori di molteplicit''a algebrica 1 si ha sempre uguaglianza tra molteplicit''a geometrica e molteplicit''a algebrica. Dunque è sufficiente controllare l'uguaglianza per gli autovalori di molteplicit''a algebrica maggiore di 1.*

Caso $a = 1$. *Si ha l'autovalore 1 di molteplicità algebrica 3; calcoliamo la molteplicità geometrica. Poiché* $V_1 = Ker(f_1 - Id_{\mathbb{R}^3})$, *si ha che* V_1 *è lo spazio delle soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} 0x & & & = & 0 \\ & 0y & + & z & = & 0 \\ & & & 0z & = & 0 \end{cases}.$$

Si ha quindi $V_1 =< (1,0,0),(0,1,0) >$. Dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 1*, essendo la dimensione di* V_1 *è 2. Si conclude che* f_1 *non è diagonalizzabile.*

Caso $a \neq 0,1$. *Si ha l'autovalore 1 di molteplicità algebrica 2; calcoliamo la molteplicit''a geometrica. Si ha* $V_1 = Ker(f_1 - Id_{\mathbb{R}^3})$*, dunque* V_1 *è lo spazio delle soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} (a-1)x & & & & = & 0 \\ & 0y & + & az & = & 0 \\ & & & 0z & = & 0 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene $V_1 =< (0,1,0) >$*, dunque la molteplicit''a geometrica dell'autovalore 1 per l'applicazione lineare* f_a *è 1, mentre la sua molteplicit''a algebrica ''e 2. Si conclude che* f_a *non ''e diagonalizzabile per* $a \neq 0$.

In conclusione f_a *è diagonalizzabile solo per* $a = 0$. *Essendo la matrice di* f_0 *rispetto alla base canonica diagonale, una base che diagonalizza* f_0 *è la base canonica stessa (ce ne sono anche altre).*

d) Nel caso $a = 0$ determinare la matrice associata a f_a rispetto alla base $w_1 = (1,1,0), w_2 = (-2,-1,0), w_3 = (1,0,-1)$. Tale nuova matrice é diagonalizzabile?

Svolgimento: La matrice A *che esprime la base* $\{w_1, w_2, w_3\}$ *rispetto alla base canonica si ottiene mettendo in colonna i vettori* w_1*,* w_2*,* w_3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che la matrice G_0 *associata all'applicazione lineare* f_0 *rispetto alla base* $\{w_1, w_2, w_3\}$*, si ottiene dalla matrice* F_0 *nel seguente modo:*

$$G_0 = A^{-1} F_0 A.$$

Calcolando la matrice inversa A^{-1} *della matrice* A *con uno qualsiasi dei metodi studiati si ottiene*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha

$$G_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ossia

$$G_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice G_0 *è diagonalizzabile poiché è associata all'endomorfismo* f_0 *che abbiamo visto essere diagonalizzabile (*G_0 *è simile alla matrice diagonale* F_0*).*

Esercizio 3. Al variare di h nei numeri reali si consideri l'insieme delle applicazioni lineari $\varphi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentate dalle matrici

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 1 & 3 & 2 & -h \end{pmatrix}$$

a) Per ogni valore di h si determini la dimensione di Im e Ker. *Vedere punto b)*

b) Per ogni valore di h si determini Im e Ker.

Svolgimento: Il sottospazio Ker(φ_h) di $\mathbb{R}^4$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di tre equazioni in quattro incognite di matrice A_h. Per risolvere il sistema operiamo sulle righe della matrice A_h tramite operazioni elementari per renderla in forma a scala. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 1 & 3 & 2 & -h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -h \\ 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \end{pmatrix} \to^{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -h \\ 0 & -1 & h-2 & h-1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -h \\ 0 & -1 & h-2 & h-1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \end{pmatrix} \to^{III+(h-1)II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -h \\ 0 & -1 & h-2 & h-1 \\ 0 & 0 & (h-2)(h-1) & (h-2)(h-1) \end{pmatrix}.$$

Caso $h = 1$.

Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque Ker(φ_1) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - w = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Le variabili libere sono z e w, le altre si esprimono in termini di queste: $y = -z$, $x = z + w$. Si può concludere che Ker(φ_1) ha dimensione 2 e una base si ottiene ponendo $z = 1, w = 0$ e $z = 0, w = 1$:

$$Ker(\varphi_1) =< (1, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) > .$$

Poiché per una qualsiasi applicazione lineare $\varphi : V \to W$ si ha che $dim(Ker(\varphi)) + dim(Im(\varphi)) = dim(V)$, segue che $dim(Im(\varphi_1)) = 2$; una base di Im(φ_1) è data ad esempio da due vettori colonna linearmente indipendenti di A_1. Quindi $Im(\varphi_1) =< (1, 0, 1), (2, 0, 3) >=< 1, 0, 0), (0, 0, 1) >$.

Caso $h = 2$.

Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque Ker(φ_2) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 2w = 0 \\ -y + w = 0 \end{cases}.$$

Le variabili libere sono z e w, le altre si esprimono in termini di queste: $y = w$, $x = -2z - w$. Si può concludere che Ker(φ_2) ha dimensione 2 e una base si ottiene ponendo $z = 1, w = 0$ e $z = 0, w = 1$:

$$Ker(\varphi_2) =< (-2, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1) > .$$

Segue che $dim(Im(\varphi_2)) = 2$; una base di Im(φ_2) è data ad esempio da due vettori colonna linearmente indipendenti di A_2. Quindi $Im(\varphi_2) =< (1, 0, 1), (2, 1, 3) >=< (1, 0, 1), (0, 1, 1) >$.

Caso $h \neq 1, 2$.

Poiché $(h-1)(h-2) \neq 0$ è possibile dividere l'ultima riga della matrice trovata per $(h-1)(h-2)$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -h \\ 0 & -1 & h-2 & h-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice è in forma a scala ed ha tre pivot, dunque $dim(Im(\varphi_h)) = 3$ e $dim(Ker(\varphi_h)) = 1$ per $h \neq 1, 2$.

La variabile libera è w, le altre si esprimono in funzione di questa. Risolvendo il sistema si ha $z = -w$, $y = w$, $x = (h-1)w$, una base di Ker(φ_h) si ottiene ponendo ad esempio $w = 1$: $Ker(\varphi_h) =< (h-1, 1, -1, 1) >$. Si ha $Im(\varphi_h) = \mathbb{R}^3$ poiché è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che abbiamo visto avere dimensione 3.

c) Determinare per ogni valore di h l'antimmagine del vettore $(1, h, 3)$ tramite φ_h. *Svolgimento:*

Caso $h = 1$.

Il vettore $(1, 1, 3)$ *non appartiene all'immagine di* φ_1*, infatti abbiamo visto che* $Im(\varphi_1) =< 1, 0, 0), (0, 0, 1) >$*; dunque* $\varphi_1^{-1}((1, 1, 3)) = \emptyset$.

Caso $h = 2$.

Abbiamo visto che $Im(\varphi_2) =< (1, 0, 1), (2, 1, 3) >$. *Esprimiamo se possibile il vettore* $(1, 2, 3)$ *come combinazione lineare dei vettori* $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 3)$*, che sono una base di* $Im(\varphi_2)$*:* $a(1, 0, 1) + b(2, 1, 3) = (1, 2, 3)$. *Si ottiene il sistema*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 1 \\ & & b & = & 2 \\ a & + & 3b & = & 3 \end{array}\right. .$$

Ponendo $b = 2$ *nella prima e nella terza equazione si ottiene in ambedue i casi* $a = -3$*, dunque il sistema è risolubile e si ha* $-3(1, 0, 1) + 2(2, 1, 3) = (1, 2, 3)$. *Ma poiché* $(1, 0, 1) = \varphi_2(1, 0, 0, 0)$ *e* $(2, 1, 3) = \varphi_2(0, 1, 0, 0)$*, si ha* $(1, 2, 3) = -3(1, 0, 1) + 2(2, 1, 3) = -3\varphi_2(1, 0, 0) + 2\varphi_2(0, 1, 0) = \varphi_2(-3, 2, 0, 0)$. *Per una qualsiasi applicazione lineare* $\varphi : V \to W$ *ed un qualsiasi* $w \in Im(\varphi)$ *si ha* $\varphi^{-1}(w) = v_0 + Ker(\varphi)$*, dove* v_0 *è tale che* $\varphi(v_0) = w$ *(la soluzione generale di un sistema lineare è la somma di una soluzione particolare del sistema più la soluzione generale del sistema omogeneo associato.). Segue che* $\varphi_2^{-1}(1, 2, 3) = (-3, 2, 0, 0)+ < (-2, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1) >$.

Caso $h \neq 1, 2$.

Poiché il determinante della matrice ottenuta da A_h *prendendo le prime tre colonne è* $(h-1)(2-h)$ *si ha che le prime tre colonne di* A_h *formano una base di* $Im(\varphi_h)$. *Esprimiamo il vettore* $(1, h, 3)$ *come combinazione lineare di questi vettori:* $a(1, 0, 1) + b(2, h - 1, 3) + c(h, 0, 2) = (1, h, 3)$. *Questa equazione vettoriale si traduce nel sistema*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & + & hc & = & 1 \\ & & (h-1)b & & & = & h \\ a & + & 3b & + & 2c & = & 3 \end{array}\right. .$$

Dalla seconda si ottiene $b = \mathfrak{h} h - 1$*; sottraendo la prima alla terza si ottiene* $b + (2 - h)c = 2$*, da cui si ricava* $c = \frac{-1}{h-1}$*; sostituendo nella prima equazione si ottiene* $a = \frac{-1}{h-1}$. *Dunque si ha*

$$(1, h, 3) = \frac{-1}{h-1}(1, 0, 1) + \frac{h}{h-1}(2, h - 1, 3) + \frac{-1}{h-1}(h, 0, 2) =$$

$$\frac{-1}{h-1}\varphi_h(1, 0, 0, 0) + \frac{h}{h-1}\varphi_h(0, 1, 0, 0) + \frac{-1}{h-1}\varphi_h(0, 0, 1, 0) = \varphi_h(\frac{-1}{h-1}, \frac{h}{h-1}, \frac{-1}{h-1}, 0).$$

Si ha quindi

$$\varphi_h^{-1}(1, h, 3) = (\frac{-1}{h-1}, \frac{h}{h-1}, \frac{-1}{h-1}, 0)+ < (h - 1, 1, -1, 1) > .$$

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio $U =< (2, 1, 1), (1, -1, -1) >$ di $\mathbb{R}^3$

(a) Determinare $U^\perp$. *Svolgimento: Si ha* $U =< (2, 1, 1), (1, -1, -1) >=< (1, 0, 0), (0, 1, 1) >$. *Un vettore* (x, y, z) *di* $\mathbb{R}^3$ *è ortogonale a* U *se e solo se è ortogonale sia a* $(1, 0, 0)$ *che a* $(0, 1, 1)$. *Dunque* $(x, y, z) \in U^\perp$ *se e solo se* $x = 0$ *e* $y + z = 0$. *Risolvendo il sistema si trova* $U^\perp =< (0, 1, -1) >$.

(b) Determinare un sottospazio T tale che $T \oplus U$ e $T \oplus U^\perp$. É unico?

Svolgimento: Poiché si deve avere $dim(T) + dim(U) \leq dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *e* $dim(T) + dim(U)^\perp \leq dim(\mathbb{R}^3) = 3$*, risulta* $dim(T) \leq 1$. *Ma poiché* T *deve essere non nullo, segue* $dim(T) = 1$. *Quindi* $T =< v >$*, con* $v \notin U$ *e* $v \notin U^\perp$ *dato che si deve avere* $T \cap U = T \cap U^\perp = 0$. *I vettori* v *di questo tipo sono tutti quelli della forma* $a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1) + c(0, 1, -1)$*, con* $a \neq 0$ *o* $b \neq 0$*, e* $c \neq 0$. *Dunque, ad esempio, si può prendere* $v = (1, 0, 0) + (0, 1, -1) = (1, 1, -1)$*; cioè* $T =< (1, 1, -1) >$. *Questa scelta di* T *non è unica; per avere un altro* T*, basta scegliere* a, b, c *come sopra, ma non proporzionali ad* $a = 1, b = 0, c = 1$.

(c) Al variare di β nei numeri reali determinare i valori di β per cui la proiezione ortogonale di $v_\beta = (1,3,\beta)$ su U sia nulla.

Svolgimento: La proiezione ortogonale di v_β su U è 0 se e solo se $v_\beta \in U^\perp$. Dunque si deve avere $(1,3,\beta) \in <(0,1,-1)>$; ma per nessun valore di β si ha che $(1,3,\beta)$ è un multiplo di $<(0,1,-1)>$. Dunque non esistono valori di β per cui la proiezione ortogonale di $(1,3,\beta)$ su U sia nulla.

(d) Per i valori per cui non é nulla, trovare β in modo che tale proiezione abbia norma 2.

Svolgimento: Per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ si ha $v = v_{//} + v_\perp$, dove $v_{//}$ denota la proiezione ortogonale di v su U e $v_\perp$ denota la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$. Inoltre si ha $v_\perp = (v \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}))(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Dunque, nel caso $v = v_\beta$ si ha $v_\perp = (0, \frac{3-\beta}{2}, -\frac{3-\beta}{2})$. Poiché si ha $v_{//} = v - v_\perp$, nel caso $v = v_\beta$ si ottiene la seguente espressione per la proiezione ortogonale di v_β su U: $v_{//} = (1, \frac{3+\beta}{2}, \frac{3+\beta}{2})$. Dunque si ha $||v_{//}|| = \sqrt{1 + 2\frac{(3+\beta)^2}{4}}$; imponendo $||v_{//}|| = 2$, si ottiene $1 + \frac{(3+\beta)^2}{2} = 4$. Da ciò si ricava che $\beta = -3 + \sqrt{6}$ oppure $\beta = -3 - \sqrt{6}$.

(e) Per i valori per cui non é nulla: vi é un valore minimo per la norma della proiezione?

Svolgimento: Abbiamo visto che la norma della proiezione lineare di v_β ha l'espressione $||v_{//}|| = \sqrt{1 + \frac{(3+\beta)^2}{s}}$. Per ogni β, questa norma è non nulla; Il valore minimo di questa espressione è 1, assunto per $\beta = -3$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo, si consideri il fascio di piani $\pi_{(a,b)}$ di equazione

$$ax - (2a+b)y + bz = 3b,$$

(a) Scrivere equazioni parametriche dell'asse s di questo fascio.

Svolgimento: L'asse di un fascio di piani proprio è la retta contenuta in ogni piano del fascio. Per ottenere l'asse s del fascio di piani $\pi_{(a,b)}$ è sufficiente intersecare due qualsiasi piani del fascio. Quindi, ad esempio, $s = \pi_{(1,0)} \cap \pi_{(0,1)}$; dalle equazioni dei due piani si ottiene una forma cartesiana di s:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z = -3 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene $s = (0,0,3) + <(2,1,1)>$.

(b) Calcolare la distanza della retta r parallela al vettore $(-1,1,1)$ e passante per il punto $P = (0,0,1)$ dal piano $\pi_{(1,0)}$.

Svolgimento: La retta r ha equazione parametrica $r = (0,0,1) + <(-1,1,1)>$, il piano $\pi_{(1,0)}$ ha equazione $x - 2y = 0$. Poiché il vettore $(-1,1,1)$ non soddisfa l'equazione $x - 2y = 0$, la direzione della retta r non è contenuta nella giaciture del piano $\pi_{(1,0)}$; dunque r e $\pi_{(1,0)}$ non sono paralleli. Quindi r e $\pi_{(1,0)}$ sono incidenti; da cui si deduce che la distanza tra r e $\pi_{(1,0)}$ è 0.

(c) Calcolare la distanza della retta r dal piano $\pi_{(0,1)}$. *Svolgimento: Poiché il vettore $(-1,1,1)$ soddisfa l'equazione $y - z = 0$, si ha che la retta r ed il piano $\pi_{(0,1)}$ sono paralleli. Dunque la distanza della retta r dal piano $\pi_{(0,1)}$ è pari alla distanza di un qualsiasi punto di r da $\pi_{(0,1)}$. Quindi usando la formula della distanza punto piano si ottiene*

$$d(r, \pi_{(0,1)}) = d(P, \pi_{(0,1)}) = \frac{|-1+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(d) Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca tra $\pi_{(a,b)}$ ed r. *Svolgimento: La giacitura di $\pi_{(a,b)}$ ha equazione cartesiana $ax - (2a+b)y + bz = 0$, la retta r ha direzione $<(-1,1,1)>$; r e $\pi_{(a,b)}$ sono paralleli se e solo se il vettore $(-1,1,1)$ soddisfa l'equazione $ax - (2a+b)y + bz = 0$, ossia se e solo se $-a - 2a - b + b = 0$, cioè se e solo se $a = 0$. Si deduce che r è incidente al piano $\pi_{(a,b)}$ per ogni piano del fascio diverso da $\pi_{(0,1)}$; abbiamo già visto che r è parallela al piano $\pi_{(0,1)}$ e non è contenuta in questo piano poiché ha distanza non nulla da questo.*

(e) Trovare, se esiste, una retta t diversa da s, avente distanza nulla da ogni piano $\pi_{(a,b)}$. *Svolgimento: Una retta ha distanza nulla da un piano se e solo se essa è incidente a questo piano. Dunque cerchiamo una retta t che sia incidente con ogni piano del fascio. È sufficiente (si dimostra facilmente essere anche necessario)prendere una qualsiasi retta passante per un punto dell'asse s, ma diversa da s stessa; ad esempio* $t = (0,0,3)+ < (1,0,0) >$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Esposito, Garuti

Prova del 21 settembre 2013

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) L'immagine di un'applicazione lineare é un sottospazio del codominio.

b) Un sistema lineare omogeneo ha sempre soluzioni.

c) Il rango di una matrice é il numero massimo di colonne diverse da zero.

* * *

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi $U =< (0, 1, 3, 1), (1, 1, 2, 1)) >$ e $T =< (1, 2, 5, 2), (1, 0, 0, 1) >$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare una base di $V = U \cap T$ ed una di $U + T = S$. La somma è diretta?

b) Trovare un sistema che abbia S come soluzione.

c) Determinare, se esiste, un sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = S$.

d) Determinare, se esiste, un sottospazio $L' \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = L' \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ siano dati gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$, $f_a(x, y, z) = (x + y - az, ay, -z)$

a) Dare la matrice di f_a rispetto alla base canonica.

b) Per quali valori di a f_a non é iniettivo? Per tali valori determinare il Ker. Vi sono altri valori di a dove f_a ammette ker non nullo?

c) Al variare di a dire se l'applicazione lineare f_a é diagonalizzabile e trovare una base che diagonalizzi.

d) Nel caso $a = 0$ determinare la matrice associata a f_a rispetto alla base $w_1 = (1, 1, 0), w_2 = (-2, -1, 0), w_3 = (1, 0, -1)$. Tale nuova matrice é diagonalizzabile?

Esercizio 3. Al variare di h nei numeri reali si consideri l'insieme delle applicazioni lineari $\varphi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentate dalle matrici

$$A_h = \begin{pmatrix} -h & 2 & 3 & 1 \\ 1-h & 0 & h-1 & 0 \\ -1 & h & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Per ogni valore di h si determini la dimensione di Im e Ker.

b) Per ogni valore di h si determini Im e Ker.

c) Determinare per ogni valore di h l'antimmagine del vettore $(3, h, 1)$ tramite φ_h.

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio $U =< (-1, 1, -1), (1, 2, 1) >$ di $\mathbb{R}^3$

(a) Determinare $U^\perp$.

(b) Determinare un sottospazio T tale che $T \oplus U$ e $T \oplus U^\perp$. É unico?

(c) Al variare di β nei numeri reali determinare i valori di β per cui la proiezione ortogonale di $v_\beta = (3, 1, \beta)$ su U sia nulla.

(d) Per i valori per cui non é nulla, trovare β in modo che tale proiezione abbia norma 2.

(e) Per i valori per cui non é nulla: vi é un valore minimo per la norma della proiezione?

Esercizio 5. Nello spazio euclideo, si consideri il fascio di piani $\pi_{(a,b)}$ di equazione

$$ax + by - (2b + a)z = 3a,$$

(a) Scrivere equazioni parametriche dell'asse s di questo fascio.

(b) Calcolare la distanza della retta r parallela al vettore $(1, 1, -1)$ e passante per il punto $P = (0, 1, 0)$ dal piano $\pi_{(0,1)}$.

(c) Calcolare la distanza della retta r dal piano $\pi_{(1,0)}$.

(d) Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca tra $\pi_{(a,b)}$ ed r.

(e) Trovare, se esiste, una retta t diversa da s, avente distanza nulla da ogni piano $\pi_{(a,b)}$.