Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Esposito-Chiarellotto

Esame - giugno 2013

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$, nelle coordinate x, y, z, t si consideri il sottospazio V dato da

$$\begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base ortonormale di V

(b) Determinare una base di $V^\perp$

(c) Dato $W =< (1,1,1,1), (3,4,0,-1) >$. Determinare $V^\perp \cap W$.

(d) Determinare la proiezione ortogonale di $(0,1,0,1)$ su $(V^\perp \cap W)^\perp$.

Svolgimento. Riducendo in forma a scala la matrice del sistema, troviamo una base per lo spazio V delle soluzioni:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad V =< (1,2,-3,0), (0,1,0,-1) > .$$

Per determinare una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\|(1,2,-3,0)\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3,0);$$

$$(0,1,0,-1) - \frac{(0,1,0,-1) \bullet (1,2,-3,0)}{\|(1,2,-3,0)\|^2}(1,2,-3,0) = (0,1,0,-1) - \frac{2}{14}(1,2,-3,0) = (-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}, -1)$$

e, siccome $\|(-1,5,3,-7)\| = \sqrt{1+25+9+49} = \sqrt{84}$, abbiamo $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{84}}(-1,5,3,-7)$.
Dalla definizione di V, troviamo immediatamente generatori di $V^\perp$ prendendo i coefficienti delle equazioni: $V^\perp =< (2,-1,0,-1), (1,1,1,1) >$. Questi generatori non sono proporzionali, formano quindi una base.
I vettori di $W \cap V^\perp$ sono i vettori $\alpha(1,1,1,1) + \beta(3,4,0,-1) = (\alpha+3\beta, \alpha+4\beta, \alpha, \alpha-\beta) \in W$ che sono ortogonali ai generatori di V:

$$\begin{cases} (\alpha+3\beta, \alpha+4\beta, \alpha, \alpha-\beta) \bullet (1,2,-3,0) = \alpha + 3\beta + 2\alpha + 8\beta = 11\beta = 0 \\ (\alpha+3\beta, \alpha+4\beta, \alpha, \alpha-\beta) \bullet (0,1,0,-1) = \alpha + 4\beta - \alpha + \beta = 5\beta = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \beta = 0.$$

Pertanto $W \cap V^\perp =< (1,1,1,1) >$.
Dato che $\dim W \cap V^\perp = 1$, conviene calcolare la proiezione su questo spazio e ricavare la proiezione sull'ortogonale per differenza:

$$p_{(W\cap V^\perp)^\perp}(0,1,0,-1) = (0,1,0,-1) - p_{(W\cap V^\perp)}(0,1,0,-1) = (0,1,0,-1) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo standard, si consideri la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x + z = 2 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una sua equazione parametrica.

(b) Trovare una retta ad essa parallela e passante per $(2,1,1)$

(c) Trovare una retta ad essa parallela e distante da essa $\sqrt{2}$.

(d) Trovare un piano π che contenga r e passante per $(2,1,3)$.

(e) Nel piano π determinare un quadrato di lato 2 che abbia un lato nella retta r e passante per il suo punto $(0,2,2)$.

(f) Determinare una retta sghemba con r.

Svolgimento La direzione di r è una soluzione del sistema omogeneo associato

$$\left(\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & -1\end{pmatrix}\right) = (1,2,-3).$$

Scegliendo il punto $A = (0,2,2) \in r$, troviamo le equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = & t\\ y = & 2+2t\\ z = & 2-3t. \end{cases}$$

Ricaviamo equazioni parametriche e cartesiane per la retta parallela passante per $(2,2,1)$:

$$\begin{cases} x = & 2+t\\ y = & 2+2t\\ z = & 1-3t \end{cases} \implies \begin{cases} 3x+z=7\\ 5x-y+z=10. \end{cases}$$

Se r' è parallela ad r e $A' \in r'$ è tale che $d(A,A') = d(r,r') = \sqrt{2}$, allora il vettore $A'-A$ è ortogonale ad r e verifica $\|A'-A\| = \sqrt{2}$. Scegliamo allora un vettore ortogonale ad r, ad esempio $(1,1,1)$, e poniamo

$$A' = A + \frac{\sqrt{2}}{\|(1,1,1)\|}(1,1,1) = (0,2,2) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{6+\sqrt{6}}{3}, \frac{6+\sqrt{6}}{3})$$

e troviamo la retta passante per A' e parallela as r, che ha le proprietà richieste:

$$\begin{cases} x = & \frac{\sqrt{6}}{3}+t\\ y = & \frac{6+\sqrt{6}}{3}+2t\\ z = & \frac{6+\sqrt{6}}{3}-3t \end{cases} \implies \begin{cases} 3x+z = \dfrac{6+4\sqrt{6}}{3}\\ 5x-y+z = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}. \end{cases}$$

Tra i piani del fascio di asse r

$$\lambda(3x+z-2)+\mu(5x-y+z)=0$$

π è quello che passa per $(2,1,3)$:

$$\lambda(6+3-2)+\mu(10-1+3)=0 \implies \lambda=12,\ \mu=-7 \implies \pi : x+7y+5z-24=0.$$

Tra le direzioni ortogonali ad r

$$\alpha(1,1,1)+\beta(3,0,1) = (\alpha+3\beta, \alpha, \alpha+\beta) \in <(1,1,1),(3,0,1)> = <(1,2,-3)>^{\perp}$$

determiniamo quelle che sono parallele a π:

$$\alpha+3\beta+7\alpha+5\alpha+5\beta = 13\alpha+8\beta = 0 \implies \alpha=-8, \beta=13.$$

Le direzioni cercate appartengono quindi al sottospazio $<(31,-8,5)>$. Determiniamo allora i vertici di un quadrato come richiesto:

$$B = A + \frac{2}{\sqrt{14}}(1,2,-3); \quad C = B + \frac{2}{\sqrt{1050}}(31,-8,5); \quad D = A + \frac{2}{\sqrt{1050}}(31,-8,5).$$

Esistono infinite rette sghembe con r. Possiamo determinarne una scegliendo un piano τ non parallelo ad r, ad esempio $\tau : x=0$ e pendendo in τ una qualsiasi retta che non passi per il punto $A = r \cap \tau = (0,2,2)$, per esempio l'asse y oppure l'asse z.

Esercizio 3. Al variare di a nei numeri reali si considerino le matrici

$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a\\ 1 & 1 & -1\\ a & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

(a) Dire perché per ogni valore di a sono diagonalizzabili.

(b) Per quali valori di a la matrice ha rango 2.

(c) Scelto a piacere uno dei valori di a trovati al punto (b), si determini una base di autovettori.

(d) Scelto a piacere uno dei valori di a trovati al punto (b), si determini una matrice ortogonale K tale che KA_aK^t sia diagonalizzabile.

Svolgimento. Le matrici sono simmetriche $\forall a \in \mathbb{R}$ e quindi (ortogonalmente) diagonalizzabili.
Per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, i vettori $(2,1,a)$ e $(1,1,-1)$ non sono proporzionali, quindi $rg(A_a) \geq 2$ $\forall a \in \mathbb{R}$.
Il rango è minore di 3 se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} = -a^2 - 2a = 0,$$

quindi $rg(A_a) = 2$ per $a = 0$ ed $a = -2$.
Scegliendo $a = 0$, il polinomio caratteristico della matrice A_0 è

$$p_0(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & -1 \\ 0 & -1 & 2-t \end{pmatrix} = t^3 - 5t^2 + 6t = t(t-2)(t-3).$$

Determiniamo gli autospazi

$$V(0) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = <(-1,2,1)>; \qquad V(2) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = <(1,0,1)>;$$

$$V(3) = (V(0) \oplus V(2))^{\perp} = <(-1,2,1),(1,0,1)>^{\perp} = <(1,1,-1)> .$$

Una base di autovettori è quindi $\{(-1,2,1),(1,0,1),(1,1,-1)\}$. Questa base è già ortogonale, per determinare la matrice ortogonale K tale che KAK^t sia diagonale, basta normalizzarli e disporli in colonna:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo tuttavia che l'esercizio chiedeva solo una matrice ortogonale K tale che KA_aK^t sia diagonalizzabile, non proprio diagonale. Si poteva quindi prendere $K = I_3$, e questo per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Per ogni λ nei numeri reali si consideri la funzione lineare $L_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3\lambda & -2\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix};$$

(a) Esistono valori di λ per cui $\dim \operatorname{Ker} L_\lambda > 2$? Per tali valori trovare nucleo ed immagine.

(b) Per i valori di λ di cui al punto precedente determinare l'antimmagine del vettore $(0,3,0)$.

(c) Determinare tutti i valori per cui dimensione del nucleo è pari a 1.

(d) Determinare per quali valori di λ la dimensione di $\operatorname{Ker} L_\lambda$ é pari a 2. Per tali valori il $\operatorname{Ker} L_\lambda$ è sempre lo stesso sottospazio?

Svolgimento. Calcoliamo

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda&\lambda&0&\lambda\\2&-1&1&1\\3\lambda&-2\lambda&\lambda&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-\lambda&1&0\\3\lambda&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{\lambda}{2}&\frac{\lambda}{2}&\frac{3\lambda}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Pertanto $\dim \operatorname{Ker} L_\lambda = 4 - rg(A_\lambda) \geq 2$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e la disuguaglianza è stretta solo per $\lambda = 0$.

$$\operatorname{Ker} L_0 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} =<(-1,0,0,2),(-1,0,2,0),(1,2,0,0)>; \quad \operatorname{Im} L_0 =<(0,1,0)>$$

(per il calcolo di $\operatorname{Im} L_0$ bisogna considerare le colonne della matrice originale, non della ridotta). La terza colonna di A_0 ci dice che $L_0(0,0,1,0) = (0,1,0)$, perciò $L_0(0,0,3,0) = (0,3,0)$, per cui

$$L_0^{-1}(0,3,0) = (0,0,3,0) + \operatorname{Ker} L_0 = (0,0,3,0)+<(-1,0,0,2),(-1,0,2,0),(1,2,0,0)>.$$

Come visto in precedenza, non esistono valori di λ tali che $\dim \operatorname{Ker} L_\lambda = 1$ mentre $\dim \operatorname{Ker} L_\lambda = 2$ per ogni $\lambda \neq 0$ e per questi valori

$$\operatorname{Ker} L_\lambda = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{\lambda}{2}&\frac{\lambda}{2}&\frac{3\lambda}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

non dipende da λ.

Esercizio 6. Nell'insieme dei numeri complessi risolvere la seguente equazione $x^4 = \frac{3i}{i+1}$.

Svolgimento. Possiamo calcolare la forma trigonometrica del numero complesso. Il numeratore é $3(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})$, il denominatore é $\frac{1}{\sqrt{2}}(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4})$. Per le formule trigonometriche allora il quoziente é $\frac{3}{\sqrt{2}}(cos(\frac{\pi}{4} + isens\frac{\pi}{4})$. Ne segue che il modulo della radice quarta di questo numero é la radice quarta (positiva..) di $\frac{3}{\sqrt{2}}$ e gli angoli sono $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k$, con $k = 0,1,2,3$. Possiamo anchee risolvere in un altro modo. Calcoliamo la forma esponenziale del numero di cui dobbiamo estrarre la radice:

$$3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3i}{i+1} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Pertanto le radici sono $x_0 = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{16}}$, $x_1 = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{9\pi}{16}}$, $x_2 = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{17\pi}{16}}$, $x_3 = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{25\pi}{16}}$.

* * *

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) Ogni matrice quadrata è diagonalizzabile. FALSO: controesempio $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

b) Due vettori ortogonali tra loro sono versori. FALSO: $(1,1)$ e $(1,-1)$ sono tra loro ortogonali, ma $\|(1,1)\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2} \neq 1$.

c) Due rette parallele possono essere sghembe. FALSO: due rette parallele appartengono ad uno stesso piano, quindi non sono sghembe.