Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Esposito, Garuti

Prova del 3 luglio 2013

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) In uno spazio di dimensione 3 due sottospazi di dimensione 2 hanno intersezione non nulla.

b) Siano $f,\, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineari. Se $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ allora f e g hanno la stessa immagine.

c) Autovettori diversi possono essere associati allo stesso autovalore.

a) per la formul;a di Grassman é vero.
b) Falso. Pur avendo lo stesso nucleo le immagini degli altri vettori che assieme ad una base del nucleo formano una base di $\mathbb{R}^3$ possono essere scelte in modo arbitrario. Quello che rimane invariato é la dimensione dell'immagine.
c) vero: possono essere anche lin.indipendenti.

* * *

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi $U =< (1,1,1),(1,2,0) >$ e $W =< (2,1,4),(0,1,-1) >$ di $\mathbb{R}^3$.

a) Determinare una base di $U \cap W$ ed una di $U + W$. La somma è diretta?

b) Trovare un sistema che abbia $U \cap V$ come soluzione.

c) Determinare, se esiste, un sottospazio $T \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $T \oplus (U \cap W) = \mathbb{R}^3$.

d) Determinare, se esiste, un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^3$.

a) I due spazi hanno dimensione 2 e per la regola di Grassman hanno interzezione che, non essendo gli stessi spazi ($(2,1,4)$ non appartiene a U) ha dimensione 1. Si vede subito che quindi $U + V = \mathbb{R}^3$ e quindi la base canonica é una sua base ad esempio. Per l'intersezione provando con $a(1,1,1)+b(1,2,0) = c(2,1,4)+d(0,1,-1)$ al variare di a,b,c,d si ha che l'intersezione é $< (0,1,-1) >$.
b) Un sistema puó essere

$$\begin{cases} z + y = (0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

c) T deve avere dim.2, basta prendere due vettori che formino assieme a $(0,1,-1)$ una base di $\mathbb{R}^3$ $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ potrebbero andare bene.
d) S dovrá avere dimensione 1. Basta prendere un vettore che sia lin. indipoendente con gli altri vettori che formano una base di U e W. $(0,0,1)$ é uno.
Esercizio 2.

a) Stabilire se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1,1,1) = (1,2,0)$, $f(1,2,0) = (1,1,1)$, $f(2,1,4) = (0,1,-1)$. Tale f è unica?

b) Se esiste una f come al punto a), determinarne una base per $\operatorname{Ker} f$ ed una per $\operatorname{Im} f$.

c) Se esiste f come al punto a), scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.

d) Stabilire se esista una funzione lineare tale che, oltre a soddisfare le richieste del punto a) sia tale che $f(2,3,1) = (2,3,1)$.

e) Stabilire se esista una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(1,1,1) = (1,1,1)$, $g(1,2,0) = (1,2,0)$, $g(2,1,4) = (0,1,-1)$, $g(0,1,-1) = (0,1,4)$. Tale g è unica?

a) i vettori dati $(1,1,1),(1,2,0),(2,1,4)$ sono una base $\mathbf{v}$: l'applicazione esiste ed é unica.
b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rappresenta l'applicazione lineare nella base $\mathbf{v}$ nel dominio e canonica del dominio. Puó servire per vedere se la mappa é un iso o meno. Non lo é poiché il determinante é pari a zero e quindi essendo il rango 2 la Im é data (ad esmepio) dalle prime due colonne $Imf =< (1,2,0),(1.1,1) >$. Il ker espresso nella base canonica non si puó evincere da questa matrice. Si passa quindi al punto c)
c) si scrive la matrice rispetto alle basi canocniche. La matrice di cam,biamento di base dalla base $\mathbf{v}$ alla base canonica é

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice cercata é AH^{-1} da questa matrice si trae il ker che é pari a $< (2,2,3) >$.
d) si noti che necessariamnte $(-1,0,1)$ é combinazione lineare dei vettori della base $\mathbf{v}$ la combinazione lineare che la realizza deve essere esattamente soddisfatta dalle immagini. Si vede che $(2,1,3) = 1(1,1,1)+ 1(1,2,0)$ e vale pure che $f(2,1,3) = f(1(1,1,1)) + f(1(1,2,0))$. quindi é compatibile e l'applicazione é la precedente e quindi esiste.
e) con lo stesso procedimento che in d) si vede che questa volta la quarta condizione non é compatibile e quindi non esiste.
Esercizio 3. Siano A e B_k le matrici seguenti, la seconda dipendente dal parametro reale k

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \qquad B_k = \begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ k^2 & -2k & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare autovalori ed autovettori di A. La matrice A è diagonalizzabile?

b) Determinare, se esiste, una base ortonormale di autovettori di A. Scrivere quindi una matrice K ortogonale tale che $K^tAK = D$ con D diagonale.

c) Determinare tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(1,1,1)$ è autovettore di B_k. Per quale autovalore?

d) Per i valori di k trovati al punto c), la matrice B_k è diagonalizzabile?

e) Tra i valori di k trovati al punto c), ce n'è qualcuno per cui B_k sia simile ad A? In caso affermativo, determinare una matrice H tale che $H^{-1}AH = B_k$. Ve ne é una che sia ortogonale? È possibile trovare una tale matrice H che sia anche ortogonale?

a) la matrice é diagonalizzabile poiché simmetrica. autovalori 7 (molt.2) e 5 (molt.1). Gli autospazi relativi sono $< (0.0,1),(1,1,0) >$ e $< 1,-1,0) >$.
b) per trovare tale base basta applicare G-S a ogni autospazio. Dal primo $(0,0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. La matrice é quindi

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \\ 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

c) Facendo il prodotto

$$\begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ k^2 & -2k & -1 \end{pmatrix}$$

per il vettore $(1,1,1)$ si trova $(7,7,k^2 - 2k - 1)$
si vede che bisogna trovare k tale che $k^2 - 2k - 1 = 7$ cioé $k = 4, -2$. Per $k = 4$ é diagonalizzabile come A e con gli stessi autovalori e con le stesse molteplicitá . quindi é simile ad A. Non é il caso per $k = -2$ non essendo diagonalizzabile.

d) Una base di autovalori per l'autospazio relativo all'autovalore 7 di B_4 é $(1,1,1),(0,1,-1)$ mentre per l'autospazio relativo a 5 abbiamo $(2,1,4)$. Se indichiamo con S la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

abbiamo l'identitá matriciale

$$K^t \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = S^{-1} B_4 S$$

ne deriva $H = KS^{-1}$
e) non é possibile trovare H ortogonale: porterebbe come conseguenza che B_4 fosse simmetrica. cosa non vera.

Esercizio 4. Al variare di a nei numeri reali, si considerino il sottospazio $U_a =< (1,1,1),(1,-1,3a) >$ di $\mathbb{R}^3$ ed il vettore $\mathbf{v} = (1,2,3)$.

(a) Per $a = 0$, calcolare la proiezione ortogonale (indicata con $p_{U_0}(\mathbf{v})$) di $\mathbf{v}$ su U_0.

(b) Sempre per $a = 0$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che abbiano la stessa proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su U_0.

(c) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la proiezione ortogonale $p_{U_a}(\mathbf{v})$ è nulla.

(d) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la norma della proiezione ortogonale $p_{U_a}(\mathbf{v})$ sia uguale a $2\sqrt{3}$.

a) Il metodi piú veloce: $U_0 =< (1,1,1),(1,-1,0) >$, allora $U_0^\perp =< (1,1,-2) >$. Un versore generatore di $U_0^\perp$ é quindi $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ quinidi la proiezione su $U_0^\perp$ é $[(1,2,3) \bullet (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})](\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ che é uguale a $\frac{-3}{\sqrt{6}}(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ quindi uguale a $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1)$ ne segue che la proiezione richiesta é $(1,2,3) - (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1) = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2)$.
b) Sono tutti quelli che differiscono da $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2)$ per un vettore di $U_0^\perp$. Quindi $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2) + U_0^\perp$.
c)Dire che la proiezione é nulla vuol dire che il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $U_a^\perp$. Quindi a tale che siano contemporaneamente verificate $\mathbf{v} \bullet (1,1,1) = 0$ e $\mathbf{v} \bullet (1,-1,a) = 0$. Ma si vede subito che la prima non é mai verificata. quindi non esiste tale a.
d) In generale $U_a^\perp =< (-3a-1, 3a-1, 2) >$ ne deriva che la proiezione su $\frac{1}{18a^2+6}(U_a^\perp$ é $\mathbf{v} \bullet (-3a-1, 3a-1, 2))(-3a-1, 3a-1, 2)$ che é uguale a $\frac{3a+3}{18a^2+6}(-3a-1, 3a-1, 2)$. Quindi la proiezione é $\mathbf{v} - \frac{3a+3}{18a^2+6}(-3a-1, 3a-1, 2)$. Vettore la vcui norma deve essere uguale a $2\sqrt{3}$. Il calcolo é lasciato.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo, al variare di $b \in \mathbb{R}$ si consideri la retta r_b di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 5y = (b+1)^2 \\ 2y + (1-b)z = 5 - b^2 \end{cases}.$$

(a) Scrivere equazioni cartesiane della retta s per i punti $P = (6,-1,1)$ e $Q = (-9,2,-1)$.
(b) Per $b = 0$, calcolare la distanza tra s ed r_0.
(c) Per $b = 1$, calcolare la distanza tra s ed r_1.
(d) Al variare di $b \in \mathbb{R}$, determinare la posizione reciproca tra s ed r_b.
(e) Determinare, se esiste, un valore di $b \in \mathbb{R}$ tale che r_b abbia uguale distanza da P e Q.
(f) Per ogni valore di $b \in \mathbb{R}$ determinare, se esiste, un punto $R_b \in r_b$ tale che R_b abbia uguale distanza da P e Q.

a) Il vettore direzione $P-Q=(15,-3,2)$ e il passaggio per P danno come possibili equqzioni

$$\begin{cases} x+5y=1 \\ 3z+3y=0 \end{cases}$$

b)Messo a sistema con assieme alle equazioni di r_0 si vede che il sistema ha una soluzione e quindi la distanza é zero.
c) Per $b=1$ si vede che il sistema analogo a prima ha sistema omogeneo di rango 3 e non omogeneo di rango 4. L edue rette non si intersecano e sono sghembe. Si vede allora subito che il piano $x+5y=1$ contiene la retta per P e Q ed é parallelo alla retta r_1 perché un piano che pass per tale retta é $x+5y=4$ ($b=1$ nella sua prima equazione). La distanza quindi tra una le dure rette é la ditanza di un qualsiasi punto di r_1 da $x+5y=1$. Un punto puó essere $(-6,2,0)$: la distanza punto piano ci dará $\frac{3}{\sqrt{26}}$.
d) Data la retta r_b

$$\begin{cases} x+5y=(b+1)^2 \\ 2y+(1-b)z=5-b^2 \end{cases}$$

La sua equazione omogenea dice che il vettore direzione é dato da (5-5b, b-1,2). Si vede anche che un suo punto puøessere $((b+1)^2,0,\frac{5-b^2}{1-b})$. Un suo punto generico
'e $((b+1)^2+\lambda(5-5b),0\lambda(b-1),\frac{5-b^2}{1-b}+2\lambda)$. Il λ a cui corrisponde il punto di minima distanza da $(6,-1,1)$ é quello per cui

$$((b+1)^2+\lambda(5-5b),\lambda(b-1),\frac{5-b^2}{1-b}+2\lambda)-(6,-1,1)$$

é ortogonale a $(5-5b,b-1,2)$. Per tale λ (che dipenderá da b) otteniamo un punto di r_b la cui distanza da $(6,-1,1)$ é la distanza di r_b da $(6,-1,1)$. La distanza dipenderá da b.Analogo per $(-9,2,-1)$. Si impongono che le distanzse siano uguali questo ci porterá una condizione su b.
e) Il Punto cercato é il punto di incontro di r_b con il piano che forma l'asse del segmento dato da P e Q. Il punto medio é $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$. La direzione del segmento é $(15,-3,2)$ quindi l'asse é il piano del fascio $15x-3y+2z=d$ che passa per $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$. Quindi $d=-24$ e quindi il piano é $15x-3y+2z=-24$. Per ogni b il punto cercato