CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE-TERRITORIO

Padova 16-06-2012

I Appello

CORREZIONE del TEMA n.1

Esercizio 1.

(a) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il vettore $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$.

(i) Trovare un sottospazio vettoriale V di dimensione 2 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su V sia $(1, 2, -1)$. Trovare una base ortonormale per V.

(ii) Sia W il sottospazio vettoriale di dimensione 1 tale che la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su W sia $(0, 1, 0)$. Calcolare $W^\perp$.

(b) In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale determinare, se esiste, un sottospazio T soddisfacente le condizioni seguenti: la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 6)$ su T è il vettore nullo e la proiezione ortogonale di $\mathbf{w} = (0, 1, 1, 0)$ su T è $(0, 0, 0, 1)$. Il sottospazio T è unico?

Svolgimento. Il sottospazio $V^\perp$ deve contenere il vettore $\mathbf{v} - p_V(\mathbf{v}) = (2, 2, 0) - (1, 2, -1) = (1, 0, 1)$. Osserviamo che $(1, 0, 1)$ (che deve appartenere a $V^\perp$ è effettivamente ortogonale a $(1, 2, -1)$ (che deve appartenere a V). Per ipotesi $\dim V = 2$, quindi $\dim V^\perp = 3 - 2 = 1$, pertanto $V^\perp = \langle(1, 0, 1)\rangle$. Quindi $V = \langle(0, 1, 0), (1, 0, -1)\rangle$.

Il sottospazio W deve contenere $p_W(\mathbf{v}) = (0, 1, 0)$ e per ipotesi è di dimensione 1, dunque $W = \langle(0, 1, 0)\rangle$. Quindi $W^\perp = \langle(1, 0, 0), (0, 0, 1)\rangle$.

Il sottospazio T deve contenere $p_T(\mathbf{w}) = (0, 0, 0, 1)$; il sottospazio $T^\perp$ deve contenere $\mathbf{u}$. Ma $(1, 2, 3, 6) \bullet (0, 0, 0, 1) = 6 \neq 0$, quindi T non esiste.

Esercizio 2. Nello spazio affine metrico usuale si considerino le due rette

$$r = \begin{cases} 2y + z = 4 \\ 2x + 2y + 3z = 8 \end{cases} \quad ; \quad s = \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2y - z = 10 \end{cases}.$$

(a) Determinarne la posizione reciproca.

(b) Determinarne la distanza ed i punti di minima distanza.

(c) Trovare un piano π che sia parallelo ad entrambe e da loro equidistante.

(d) Determinare la proiezione ortogonale di r su π.

Svolgimento. Le rette sono sghembe, dato che la matrice completa del sistema ha rango 4:

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 10 \end{array}\right) = 32.$$

Scriviamo le rette in equazioni parametriche:

$$r = \begin{cases} x &= 2 + 2\alpha \\ y &= 2 + \alpha \\ z &= -2\alpha \end{cases} \quad ; \quad s = \begin{cases} x &= 8 + 2\beta \\ y &= -\beta \\ z &= -10 - 2\beta \end{cases}.$$

I punti di minima distanza $R \in r$ ed $S \in s$ sono quelli per i quali il vettore $S - R$ è ortogonale ad entrambe le rette. Corrispondono quindi ai valori di α e β per cui il vettore

$$(8+2\beta, -\beta, -10-2\beta) - (2+2\alpha, 2+\alpha, -2\alpha) = (6-2\alpha+2\beta, -2-\alpha-\beta, -10+2\alpha-2\beta)$$

soddisfa

$$\begin{array}{ll} (6-2\alpha+2\beta, -2-\alpha-\beta, -10+2\alpha-2\beta) \bullet (2,1,-2) = 30 - 9\alpha + 7\beta = 0 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{array} \right. \\ (6-2\alpha+2\beta, -2-\alpha-\beta, -10+2\alpha-2\beta) \bullet (2,-1,-2) = 34 - 7\alpha + 9\beta = 0 & \end{array}$$

quindi $R = (4,3,-2)$ ed $S = (2,3,-4)$. Pertanto $d(r,s) = d(R,S) = \|(-2,0,-2)\| = 2\sqrt{2}$.
Un piano parallelo ad entrambe le rette ha equazione $x + z + \delta = 0$. Determiniamo il coefficiente δ imponendo che il piano abbia uguale distanza dalle due rette:

$$d(\pi, r) = d(\pi, R) = \frac{|2+\delta|}{\sqrt{2}}; \qquad d(\pi, s) = d(\pi, S) = \frac{|-2+\delta|}{\sqrt{2}}.$$

Allora $d(\pi,r)^2 = d(\pi,s)^2$ implica che $(2+\delta)^2 = \delta^2 + 4\delta + 4$ sia uguale a $(-2+\delta)^2 = \delta^2 - 4\delta + 4$, da cui si deduce che $\delta = 0$.
La proiezione ortogonale di r su π si trova ad esempio intersecando π con il piano ρ che passa per r ed è parallelo alla direzione $(1,0,1)$ ortogonale ad entrambe le rette. Determino ρ nel fascio di piani di asse r:

$$\lambda(2y + z - 4) + \mu(2x + 2y + 3z - 8) = 0.$$

Imponendo ad $(1,0,1)$ di essere soluzione dell'equazione omogenea, troviamo $\lambda(1) + \mu(5) = 0$; scegliendo $\lambda = -5$ e $\mu = 1$ otteniamo

$$\rho : 2x - 8y - 2z + 12 = 0$$

quindi la proiezione ortogonale di r su π è

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x - 4y - z + 6 = 0 \end{array} \right. .$$

Esercizio 3. Al variare del parametro k nei numeri reali, considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & k & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

(b) Nei casi in cui A_k è diagonalizzabile, trovare una base che la diagonalizza.

(c) In tutti i casi in cui A_k ha un autovalore di molteplicità algebrica 3, determinare una matrice H tale che $H^{-1}A_kH$ sia una matrice diagonale o di Jordan.

Svolgimento. Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice:

$$p_k(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ -3 & k-t & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & -k-t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (t-1)^2[t^2 - (k+1)^2] = (t-1)^2(t-k-1)(t+k+1).$$

L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica almeno 2 e molteplicità geometrica pari a:

$$m_g(1) = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & k-1 & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & -k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & k \neq -2 \\ 3 & k = -2 \end{cases}.$$

Altri autovalori di molteplicità algebrica almeno 2 si hanno nei casi seguenti:

$$\begin{array}{lll} k+1 = -k-1 & \iff k = -1 & \text{autovalore: } 0 \\ k+1 = 1 & \iff k = 0 & \text{autovalore: } 1 \\ -k-1 = 1 & \iff k = -2 & \text{autovalore: } 1. \end{array}$$

Possiamo concludere che A_k è diagonalizzabile per ogni $k \notin \{-2,-1,0\}$, avendo l'autovalore 1 di molteplicità algebrica e geometrica 2 e due autovalori distinti ($k+1$ e $-k-1$) di molteplicità algebrica e geometrica 1.
Per $k = -2$, abbiamo $m_a(1) = m_g(1) = 3$, quindi A_{-2} è diagonalizzabile. Gli autospazi sono

$$V(1) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle;$$

$$V(-1) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \Longrightarrow \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k = -1$ la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è 2 mentre quella geometrica è

$$m_g(0) = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad J_{-1} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Per $k = 0$, abbiamo $m_a(1) = 3$ e, come già visto, $m_g(1) = 2$, quindi A_0 è simile alla matrice

$$J_0 = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Gli autospazi sono

$$V(1) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle; \; V(-1) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Calcoliamo anche

$$W_2(1) = \ker(A_{-2} - I_4)^2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Inoltre

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare

$$f \colon \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$$
$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (2a_2,\ -a_0 + a_1 + a_2,\ a_0 - a_1 + 2a_2).$$

(a) Trovare la matrice associata ad f rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ ed alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base per $\ker f$ e completarla a base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

(c) Stabilire se f è suriettiva.

(d) Determinare l'antimmagine di $(1, 1, 1)$ e di $(2, 2, 1)$.

(e) Dato il sottospazio $W =< -1 - x^2,\ x - x^2 >$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$, determinare $W \cap \ker f$.

Svolgimento. Calcoliamo

$$f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M = M(f; \{1, x, x^2\}, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate dei vettori di $\ker f$ sono i coefficienti dei vettori di $\ker M$. Li determiniamo calcolando la decomposizione LU di M:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ker(M) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

perciò $\ker f = \langle 1 + x \rangle$. Per completare ad una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ aggiungiamo due polinomi i cui coeficienti completino una base di $\ker M$ ad una base di $\mathbb{R}^3$, per esempio

$$\mathbb{R}^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{R}[x]^{\leq 2} = \langle 1 + x, x, x^2 \rangle.$$

Poiché $\dim \mathbb{R}[x]^{\leq 2} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\dim \ker f = 1$, il teorema delle dimensioni implica che $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$ ed f non può essere suriettiva. $\operatorname{Im} f$ è generata dalle colonne di M; le prime due sono proporzionali quindi bastano le ultime due. Allora

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} f \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varnothing.$$

D'altra parte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f(x) + f(x^2) \quad \Rightarrow \quad x + x^2 \in f^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x + x^2 + \ker f.$$

In alternativa, si poteva risolvere il sistema non omogeneo di matrice incompleta M e termine noto $(2,2,1)$: le soluzioni forniscono i coefficienti dei vetori della controimmagine cercata rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.

I polinomi di $W \cap \ker f$ hanno come coefficienti i vettori del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ intersezione di $\ker M$ con il sottospazio $W' = \langle(-1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$. Troviamo

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ker M \subseteq W' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker f \subseteq W.$$

e quindi $\ker f \cap W = \ker f$. In alternativa, si poteva cercare di scrivere $1 + x = a(-1 - x^2) + b(x - x^2) = -a + bx - (a + b)x^2$, trovando la soluzione $a = -1$, $b = 1$.

Esercizio 5. Scrivere il numero complesso $z = \frac{2^4(2+2i^5)}{(1-i)^5}$ nella forma $a + ib$.

Svolgimento. Ricordando che $i^2 = -1$, quindi $i^5 = i(-1)^2 = i$, e la formula $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ abbiamo

$$\frac{2^4(2+2i^5)}{(1-i)^5} = 2^4(2+2i)\frac{(1+i)^5}{2^5} = (1+i)^6 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = 2^3\, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i.$$

QUESITI PRELIMINARI

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) Due sottospazi di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ hanno sempre un vettore non nullo in comune.
2) Se una $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare è tale che $f(1,1,1) = f(-1,-1,-1)$ allora f non è suriettiva.
3) Siano r es s due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$. Esiste un'unica retta incidente r ed s.

Risposte.

1) VERO: per la formula di Grassmann l'intersezione dei due sottospazi ha dimensione positiva.

2) VERO: $f(1,1,1) = -f(1,1,1)$ implica $f(1,1,1) = (0,0,0)$, quindi $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$, dunque f non è iniettiva e, per il teorema delle dimensioni, non può essere suriettiva.

3) FALSO: Ne esistono infinite, ogni retta passante per un punto di r ed uno di s soddisfa la condizione.