Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Corso di Laurea Ingegneria Edile-Architettura

(Primo appello/II prova parziale 15/6/2015 - Chiarellotto-Urbinati)

Per la II prova: solo esercizi 1,2,3. Per l'esame: esercizi 1,2,3,4,5.
Rispondere necessariamente ai seguenti quesiti con vero o falso, giustificando le risposte (non richiesto per II prova)
1) Una matrice quadrata con tutte le entrate diverse da zero è sempre invertibile. Vero o falso?
2) Un sistema lineare omogeneo ha sempre almeno una soluzione. Vero o falso?
3) Ogni matrice simmetrica ad entrate in $\mathbb{R}$ è diagonalizzabile. Vero o falso?

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i sottospazi
$V = x + y = 0$ and $W = \langle(2, -2, 1), (1, 1, 3)\rangle$

a) Determinare un sistema che abbia W come soluzioni. Determinare l'intersezione tra $V \cap W$.

b) Trovare una base ortonormale di V. Determinare la proiezione ortogonale di $(1, 1, 3)$ su V e su W.

c) Determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno la stessa proiezione ortogonale di $(1, 1, 3)$ su V. Sono soluzioni di un sistema lineare? Trovarlo.

Soluzione: Possiamo prendere

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cioè $W : 7x + 5y - 4z = 0$. V ha come base (ad esempio): $(1, -1, 0), (0, 0, 1)$. Applicando G-S una base ortonormale è data da $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1)\}$.
La prioezione ortogonale su V di $(1, 1, 3)$ è

$$p_V((1, 1, 3)) = [(1, 1, 3) \bullet (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)](\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) + [(1, 1, 3) \bullet (0, 0, 1)](0, 0, 1)] = (0, 0, 3).$$

Mentre per l'altra proiezione, dato che $(1, 1, 3)$ è uno dei generatori dello spazio, otteniamo immediatamente $p_W((1, 1, 3)) = (1, 1, 3)$. I vettori che hanno la stessa proiezione ortogonale di $(1, 1, 3)$ su V sono quelli che si ottengono sommando a $(1, 1, 3)$ un vettore ortogonale a V. Ma tali vettori sono tutti mutipli di $(1, 1, 0)$ (che è collegato alla sua equazione $x+y = 0$). Quindi $(1, 1, 3)+\langle(1, 1, 0)\rangle$. Dunque le soluzioni sono del tipo $(1 + t, 1 + t, 3)$. I.e. $x = 1 + t, y = 1 + t, z = 3$ cioè

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. Nello spazio tridimensionale euclideo usuale, si considerino la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

e la retta s data da $(0, 1, 0) + \langle(0, 1, 1)\rangle$.

a) Determinare la posizione reciproca e la loro distanza.

b) Determinare due punti $R \in r$ e $S \in s$ di minima distanza. Determinare l'asse del segmento individuato da R e S cioè l'insieme dei punti dello spazio equidistanti da R e S.

Soluzione: Scriviamo la retta s in forma cartesiana. Sarà data dal sistema:

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Per studiare l'intersezione scriviamo la matrice associata alle 2 rette:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

riducendo in forma a scalini otteniamo che le due rette sono sghembe.

Troviamo direttamente i punti di minima distanza. La direzione ortogonale alle due rette è data da $(1,-1,1)$ e scrivendo i piani π_r e π_s otteniamo i punti di minima distanza. Si trovano quindi $R=(1,0,1)$ e $S=(0,1,0)$. Ne deriva che la distanza è $||(1,-1,1)||=\sqrt{3}$.

L'asse è individuato dal piano che passa per il punto medio del segmento individuato da R e S e che ha giacitura ortogonale al vettore ortogonale alla giacitura delle dure rette (oppure dalla giacitura data dalla somma della giacitura delle dure rette). Il vettore ortogonale è $(1,-1,1)$ e quindi la giacitura del piano è $x-y+z=\epsilon$. Il punto medio è $M=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e quindi il piano è $x-y+z=\frac{1}{2}$ (oppure $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})+\langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle$). Ora: tale piano ha la proprietà che ogni suo punto è equidistante da R e S cioè forma un triangolo isoscele (....anzi tutti i triangoli isosceli con base R e S sono su quel piano.....).

La richiesta del problema è trovare un punto della retta (che indichiamo con l) che fornisca un triangolo equilatero con R e S. Quindi necessariamente tale punto deve stare sull'asse (un triangolo equilatero è isoscele) e sulla retta l: ma la retta e il piano hanno **un solo punto in comune !!**: trovarlo e verificare che dista da R o da S diversamente da $\sqrt{3}$, condizione necessaria per avere un equilatero. Quindi non esiste.

c) Data la retta

$$t:\begin{cases} x-y-z=-5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

determinare se esistono triangoli equilateri aventi due vertici in R e S ed il terzo sulla retta t. In caso affermativo determinare tutti i tali triangoli.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori e autospazi di B e C. Dire se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

b) Al variare di a in $\mathbb{R}$ si determino autovalori e autospazi di A. Per quali valori di a la matrice è diagonalizzabile.

c) Determinare i valori del parametro a per cui A è simile a C e trovare una matrice invertibile H tale che $C=H^{-1}AH$.

d) Per quali valori del parametro A è simile a B? (suggerimento: verificare se esiste una matrice diagonale D tale che $AD=DB$)

Soluzione: Si consideri B ha come polinomio caratteristico: $(1-\lambda)^2(3-\lambda)$: autospazio relativo a 1: $\langle(0,0,1)\rangle$ e relativo a 3: $\langle(2,0,1)\rangle$. Non è diagonalizzabile. La matrice C invece ha lo stesso polinomio caratteristico ma autospazi : relativo a 1: $\langle((2,-1,0),(0,0,1)\rangle$, mentre per 3: $\langle(0,1,0)\rangle$ ed è diagonalizzabile. Non sono simili. Per quanto riguarda A: ha sempre lo stesso polinomio caratteristico $(1-\lambda)^2(3-\lambda)$. Il problema della diagonalizzazione è legato ad 1: l'autospazio relativo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice

$$A=\begin{pmatrix} 3-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & a & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

per cui autospazio deve avere dimensione 2: e quindi rango della matrice è uguale a 1. cioè $a = 0$. Ne deriva che A è simile ad C per $a = 0$ perchè sono ambedue diagonalizzabili con polinomio caratteristico uguale. quindi esiste una matrice invertibile di autovettori H tale che

$$H^{-1}CH = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cosí come per A (con $a = 0$): K di autovettori

$$K^{-1}AK = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $H^{-1}CH = K^{-1}AK$, ne segue: $C = HK^{-1}AKH^{-1}$. Quindi la matrice cercata è KH^{-1}. La matrice H è

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per K (il vettore $(2, 0, 1)$ è l'autospazio relativo a 3...)

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare.

a) Determinare la matrice associata alle base canoniche della applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ per cui $f(1, 0, 0, 0) = (2, 1)$, $f(0, 1, 0, 0) = (3, 4)$, $f(0, 0, 1, 0) = (1, 3)$ e $f(1, 1, 1, 1) = (1, 4)$. Determinare il suo nucleo e la sua immagine.

b) Si consideri il sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ dato dai vettori (x, y, z, t) tali che

$$\begin{cases} x + y + 2t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$$

Determinare $T \cap ker f$.

c) Determinare un sottospazio L tale che $L \oplus ker f = L \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Soluzione. È vero che $(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ sono uan base di $\mathbb{R}^4$: quindi abbiamo tutte le informazioni per avere una unica applicazione lineare. Noto che $(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 1) - (1, 0, 0, 0) - (0, 1, 0, 0) - (0, 0, 1, 0)$ quindi se deve essere lineare $f(0, 0, 0, 1) = f(1, 1, 1, 1) - f(1, 0, 0, 0) - f(0, 1, 0, 0) - f(0, 0, 1, 0)$. Abbiamo quindi $f(0, 0, 0, 1) = (3, 4) - (2, 1), -(3, 4) - (1, 3) = (-5, -4)$. La matrice della applicazione è

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

ha rango due: quindi Im è tutto $\mathbb{R}^2$, il Ker è collegato alle souzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che ha come soluzione uno spazio di dimensione 2. Dalla forma a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

otteniamo: $ker(f) = \langle(1,-1,1,0),(8,3,0,5)\rangle$. Quindi i suoi vettori sono $(\alpha+8\beta, -\alpha+3\beta, \alpha, 5\beta)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Li possiamo mettere nel sistema che caratterizza T:

$$\begin{cases} (\alpha+8\beta)+(-\alpha+3\beta)+2(5\beta)=0 \\ (\alpha+8\beta)+2(-\alpha+3\beta)+(\alpha)-(5\beta)=0 \end{cases}$$

Ottengo dalle due equazioni $11\beta = 0, 9\beta = 0$ quindi $\beta = 0$ e quindi l'intersezione è data da $\langle(1,-1,1,0)\rangle$. Per l'ultimo quesito occorre dare una descrizione vettoriale di T i.e. trovarne una base delle soluzioni: risolvendo il sistema si trova $\langle(1,-1,1,0),(0,-2,5,1)\rangle = T$. Per Trovare L come voluto si debbono trovare $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ e $(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ in modo che le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

abbiano determinante diverso da zero. Si vede subito che la scelta $(0,1,0,0) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ e $(1,0,0,0) = (\alpha',\beta',\gamma',\delta')$, va bene. Ma anche $(0,0,1,0) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ e $(0,0,0,1) = (\alpha',\beta',\gamma',\delta')$...

Esercizio 5. Sia dato il seguente sistema lineare al variare del parametro reale t:

$$\begin{cases} -tx+(t-1)y+z=1 \\ (t-1)y+tz=1 \\ 2x+z=5 \end{cases}$$

a) Risolvere il sistema per ogni valore del parametro t.

b) Per $t = 1$ si determini l'immagine ed il nucleo dell'endomorfismo associato ad A_1 rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,2,1)\}$.

Soluzione:

Scriviamo la matrice associata al sistema e riduciamo in forma a scala.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & (t-1) & t & 1 \\ -t & (t-1) & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & (t-1) & t & 1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{t}{2} & \frac{5}{2}t \end{pmatrix},$$

se $t \neq 1, 2$ vediamo che la matrice ottenuta è in forma a scala e avremo una soluzione unica dipendente da t.

Se $t = 1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

che non ha soluzioni.

Se $t = 2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

che non ha soluzioni.

Denotiamo f l'endomorfismo che dobbiamo studiare. Rispetto alla base canonica abbiamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo studiare l'immagine dei vettori della nuova base.

$f((1,0,0)_{\mathcal{B}}) = f((1,0,0)_{\mathcal{E}}) = (-1,0,2)_{\mathcal{E}} = (1,0,0)_{\mathcal{E}} + 4(0,1,1)_{\mathcal{E}} - 2(1,2,1)_{\mathcal{E}} = (1,4,-2)_{\mathcal{B}}$.

Similmente avremo $f((0,1,0)_{\mathcal{B}}) = (1,1,0)_{\mathcal{B}}$ e $f((0,0,1)_{\mathcal{B}}) = (2,5,-2)_{\mathcal{B}}$, ottenendo la matrice:

$$A_{1,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$