ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Corso di Laurea Ingegneria Edile-Architettura

(Prima prova parziale 18/4/2015 - Chiarellotto-Urbinati)

Rispondere necessariamente ai seguenti quesiti con vero o falso e giustificando le risposte
1) Non esiste uno spazio vettoriale di dimensione 1. vero o falso?
2) Nello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n, una matrice con tutti 1 sulla diagonale è l'elemento neutro. Vero o falso?
3) Se un'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ è biettiva $\dim V = \dim W$. Vero o falso?

Soluzione:
1) FALSO: Ad esempio$\mathbb{R}$ come spazio vettoriale ha dimensione 1.
2) FALSO: L'unico elemento neutro delle matrici di ordine n è quello 0 in tutte le entrate.
3) VERO: Biettiva significa iniettiva più suriettiva. Iniettiva: $\dim V = \dim \mathrm{Im}(\varphi) \leq \dim W$. Suriettiva: $\dim V \geq \dim W = \dim \mathrm{Im}(\varphi)$.

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$.

a) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $V = \langle(1,1,1,1),(0,0,1,2),(1,1,0,-1)\rangle$.

b) Si determini la dimensione e una base dello spazio vettoriale S delle soluzioni del sistema omogeneo in (x,y,z,t)
$$\begin{cases} x - 3z + t = 0 \\ x + y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

c) Determinare (mostrare una base e la dimensione) $S + V$ e $S \cap V$.

Soluzione:
a) Notiamo che $(1,1,1,1) - (0,0,1,2) = (1,1,0,-1)$ e che i due vettori $(1,1,1,1)$ e $(0,0,1,2)$ sono linearmente indipendenti. Una base di V è quindi data da $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(0,0,1,2)\}$ e $\dim V = 2$.
b) Consideriamo la martrice associata al sistema e riduciamola a scala per poterlo risolvere
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II-I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ottenendo } \begin{cases} x = 3z - t \\ y = z - t \end{cases}$$
L'insieme delle soluzioni sarà quindi $\mathcal{S} = \{(3z-t, z-t, z, t) | z, t \in \mathbb{R}\} = \langle(3,1,1,0),(1,1,0,-1)\rangle$, da cui $\dim S = 2$.
c) Osserviamo che il vettore $(1,1,0,-1)$ è contenuto in entrambi gli spazi. Quindi sicuramente $\langle(1,1,0,-1)\rangle \subseteq S \cap V$. Per verificare che questa sia un'uguaglianza vediamo la dimensione di $S+V = \langle(1,1,1,1),(0,0,1,2),(3,1,1,0),(1,1,0,-1)\rangle$. Utilizzando la solita matrice, vediamo che il rango e quindi la dimensione è 3. In particolare $S + V = \langle(1,1,1,1),(0,0,1,2),(3,1,1,0)\rangle$. Per il teorema delle dimensioni $\dim(S \cap V) = 1$, quindi $\langle(1,1,0,-1)\rangle = S \cap V$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Si considerino le seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Consideando A e B come matrici associate a 2 endomorfismi φ e ψ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle base $\mathcal{V}$, determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di φ e ψ (nella base $\mathcal{V}$).

b) Calcolare $\mathrm{Im}(\varphi) + \mathrm{Ker}(\varphi)$. Sono $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ in somma diretta?

c) Determinare un sottospazio T che non sia $\ker(\psi)$ tale che $T \oplus \mathrm{Im}(\psi)$. Puó T avere dimensione 2?

d) Calcolare $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\psi)$ (sempre nella base v_1, v_2, v_3).

e) Se $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,0,3)$ e $v_3 = (1,2,1)$ determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ rispetto alla base canonica.

Soluzione:
a) Ricordiamo che l'immagine di un'applicazione lineare è data dai vettori colonna della matrice associata (nella base data). Quindi $\operatorname{Im}\varphi = \langle (0,2,-1),(1,0,2)\rangle$, mentre $\operatorname{Im}\psi = \langle(-4,2,-1),(-3,-4,2),(-4,0,0)\rangle$. Verificheremo ora il rango delle matrici associate per calcolare sia la dimensione effettiva (e quindi una base) e il nucleo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}+2\text{III}]{\substack{\text{II}\\ \text{I}}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-4\text{II}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ottenendo per il nucleo } \begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi avremo $\ker(\varphi) = \langle(0,0,1)\rangle$ and $rg(A) = 2$, quindi $\{(0,2,-1),(1,0,2)\}$ è una base per $\operatorname{Im}\varphi$.
Similmnte per ψ, otteniamo $\operatorname{Im}\psi = \langle(1,0,0),(0,2,-1)$ e $\ker\psi = (8,4,-11)$.
b) $\operatorname{Im}\varphi + \ker\varphi = \langle(0,2,-1),(1,0,2),(0,0,1)\rangle$. Tramite la matrice associata verifichiamo facilmente che il rango è 3, quindi per il teorema delle dimensioni l'intersezione è il vettore nullo e quindi la somma è diretta.
c) Come prima cosa, notiamo che $\dim(\operatorname{Im}\psi) = 2$ e $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, quindi per il teorema delle dimensioni $\dim T \leq \dim R^3 - \dim(\operatorname{Im}\psi) = 1$, quindi T non può avere dimensione 2. Un esempio di tale T è $T = \langle(0,0,1)\rangle$.
d) Per calcolare l'intersezione ci chiediamo se esistono dei valori A, B, C, D tali che $A(0,2,-1)+B(1,0,2) = C(1,0,0) + D(0,2,-1)$.
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} B = C \\ A = D \\ -A + 2B = -D \end{cases} \quad \text{da cui } B = C = 0 \text{ e } \operatorname{Im}\psi \cap \operatorname{Im}\varphi = \langle(0,2,-1)\rangle.$$

e) $\ker\varphi = \langle(0,0,1)_{\mathcal{V}}\rangle = \langle(1,2,1)_{\mathcal{E}}\rangle$ e
$\operatorname{Im}\varphi = \langle(0,2,-1)_{\mathcal{V}},(1,0,2)_{\mathcal{V}}\rangle = \langle 2(2,0,3)_{\mathcal{E}} - (1,2,1)_{\mathcal{E}}, (1,0,1)_{\mathcal{E}} + 2(1,2,1)_{\mathcal{E}}\rangle = \langle(3,-2,5)_{\mathcal{E}},(3,4,3)_{\mathcal{E}}\rangle$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema non omogeneo dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + \alpha y - z = 0 \\ x + y = 1 \\ x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Indichiamo il sistema con $A_\alpha\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove A_α è una matrice quadrata di ordine 3, e chiamiamo T_α l'insieme delle sue soluzioni.

a) Al variare di α si trovino le soluzioni T_α del sistema.
b) Per $\alpha = 1$ si determini l'immagine e il nucleo dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato ad A_1 rispetto alla base canonica.
c) Determinare un altro endomorfismo avente la stessa immagine e lo stesso nucleo dell'endomorfismo associato a A_1 ma diverso da quest'ultimo.

Soluzione:
a) Consideriamo la matrice completta associata al sistema e riduciamola in forma a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{\substack{\text{II}\\ \text{I}-\text{II}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$

gli unici due casi in cui la forma diventa 'non a scala' è per $\alpha = 0, 1$. Quindi:

- per $\alpha \neq 0, 1$ allora $rg(A) = rg(A|b) = 3$ e il sistema ammette soluzione unicaunica. Troviamola esplicitamente:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (\alpha-1)y - z = -1 \\ \alpha z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{\alpha} = 1 & \rightarrow x = \dfrac{\alpha+1}{\alpha} \\ (\alpha-1)y - \dfrac{1}{\alpha} = -1 & \rightarrow y = -\dfrac{1}{\alpha} \\ z = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$T_\alpha = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$.

- per $\alpha = 0$ abbiamo $rg(A) = 2$ e $rg(A|b) = 3$ quindi il sistema non ammette soluzioni.
- per $\alpha = 1$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III+II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ottenendo $rg(A) = rg(A|b) = 2$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni. Queste sono date da

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 \end{cases} \text{ quindi otteniamo } T_1 = \{(x, 1-x, 1) | x \in \mathbb{R}\} = (0, 1, 1) + \langle(1, -1, 0)\rangle.$$

b) La matrice associata all'endomorfismo è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'immagine è generata dai vettori colonna, quindi $\operatorname{Im} A_1 = \langle(1, 1, 1), (0, 1, -1)\rangle$.
Per il nucleo riduciamo in forma a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ottenendo per il nucleo } \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \text{ e quindi } kerA_1 = \langle(1, -1, 0)\rangle.$$

c) L'endomorfismo deve rispettare le condizioni date da nucleo e immagine! Lo spazio generato dai vettori colonna deve essere uguale a $\operatorname{Im} A_1$ (e quindi possiamo scegliere una qualsiasi base di tale spazio, che sarà composta di due elementi). Il nucleo ci dice che, chiamato f l'endomorfismo, $f(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$, quindi $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0)$, cioè le due colonne iniziali devono avere la stessa immagine. Un esempio di tale matrice è:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$