

# Fondazione costruttiva della matematica

**Giovanni Sambin** & **Francesco Ciraulo**

Dip. di Matematica Pura ed Applicata  
Padova

Dip. di Matematica ed Applicazioni  
Palermo

*La ricerca logica in Italia*  
*Convegno in onore di Corrado Mangione*  
Milano, 10 - 11 Settembre 2009

# Problema:

completare la seguente tabella:

(indicare le opportune STRUTTURE ALGEBRICHE che catturano le proprietà degli oggetti indicati, a seconda della FONDAZIONE SOTTOSTANTE)

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE		
COSTRUTTIVAMENTE		

# Problema:

completare la seguente tabella:

(indicare le opportune STRUTTURE ALGEBRICHE che catturano le proprietà degli oggetti indicati, a seconda della FONDAZIONE SOTTOSTANTE)

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE	cBa	
COSTRUTTIVAMENTE		

# Problema:

completare la seguente tabella:

(indicare le opportune STRUTTURE ALGEBRICHE che catturano le proprietà degli oggetti indicati, a seconda della FONDAZIONE SOTTOSTANTE)

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE	cBa	Locale (Frame, cHa)
COSTRUTTIVAMENTE		

## Problema:

completare la seguente tabella:

(indicare le opportune STRUTTURE ALGEBRICHE che catturano le proprietà degli oggetti indicati, a seconda della FONDAZIONE SOTTOSTANTE)

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE	cBa	Locale (Frame, cHa)
COSTRUTTIVAMENTE		Formal Topology (?)

# Problema:

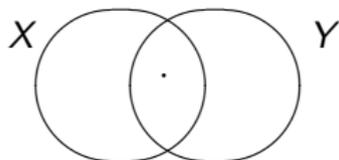
completare la seguente tabella:

(indicare le opportune STRUTTURE ALGEBRICHE che catturano le proprietà degli oggetti indicati, a seconda della FONDAZIONE SOTTOSTANTE)

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE	cBa	Locale (Frame, cHa)
COSTRUTTIVAMENTE	?	Formal Topology (?)

## Perché non una cHa?

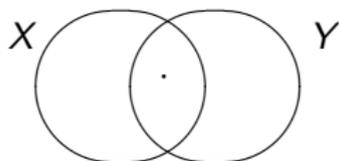
Lavorando con sottoinsiemi ci serve rappresentare la seguente situazione:



( $X$  e  $Y$  hanno intersezione abitata).

## Perché non una cHa?

Lavorando con sottoinsiemi ci serve rappresentare la seguente situazione:



( $X$  e  $Y$  hanno intersezione abitata).

Ma la relazione  $x \wedge y \neq 0$  in una cHa **NON** funziona  
cioè non gode delle opportune proprietà  
(a meno che non si adotti la logica classica al metalinguaggio).

# La relazione di overlap

## Definition

$$X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Y \quad \stackrel{\text{def.}}{\iff} \quad X \cap Y \text{ abitato}$$

## Proprietà:

# La relazione di overlap

## Definition

$$X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Y \stackrel{\text{def.}}{\iff} X \cap Y \text{ abitato}$$

## Proprietà:

- $X \text{ } \overline{\cap} \text{ } (\bigcup_{i \in I} Y_i) \iff (\exists i \in I) (X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Y_i)$

# La relazione di overlap

## Definition

$$X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Y \stackrel{\text{def}}{\iff} X \cap Y \text{ } \textit{abitato}$$

## Proprietà:

- $X \text{ } \overline{\cap} \text{ } (\bigcup_{i \in I} Y_i) \iff (\exists i \in I) (X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Y_i)$
- $X \text{ } \overline{\cap} \text{ } (Y \cap Z) \iff (X \cap Y) \text{ } \overline{\cap} \text{ } Z$

# La relazione di overlap

## Definition

$$X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Y \stackrel{\text{def}}{\iff} X \cap Y \text{ abitato}$$

## Proprietà:

- $X \text{ } \overline{\cap} \text{ } (\bigcup_{i \in I} Y_i) \iff (\exists i \in I) (X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Y_i)$
- $X \text{ } \overline{\cap} \text{ } (Y \cap Z) \iff (X \cap Y) \text{ } \overline{\cap} \text{ } Z$
- $\forall Z (X \text{ } \overline{\cap} \text{ } Z \Rightarrow Y \text{ } \overline{\cap} \text{ } Z) \implies X \subseteq Y$

# Overlap Algebras

## Definition (Overlap Algebra)

Reticolo completo

+

$\bowtie$  : relazione binaria simmetrica tale che:

- $x \bowtie (\bigvee_{i \in I} y_i) \iff (\exists i \in I) (x \bowtie y_i)$
- $x \bowtie (y \wedge z) \iff (x \wedge y) \bowtie z$
- $\forall z (x \bowtie z \Rightarrow y \bowtie z) \implies x \leq y$

# Overlap Algebras

## Definition (Overlap Algebra)

Reticolo completo

+

$\bowtie$  : relazione binaria simmetrica tale che:

- $x \bowtie (\bigvee_{i \in I} y_i) \iff (\exists i \in I) (x \bowtie y_i)$
- $x \bowtie (y \wedge z) \iff (x \wedge y) \bowtie z$
- $\forall z (x \bowtie z \implies y \bowtie z) \implies x \leq y$

Esempio canonico:

l'insieme delle parti di un insieme.

## Il punto della situazione:

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICA- MENTE	cBa	Locale (Frame, cHa)
COSTRUTTIVA- MENTE	<b>OVERLAP ALGEBRA</b>	Formal Topology (?)

## Il punto della situazione:

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE	cBa	Locale (Frame, cHa)
COSTRUTTIVAMENTE	<b>OVERLAP ALGEBRA</b>	Formal Topology (?)

**overlap algebra** = come un INTUZIONISTA vede i sottoinsiemi

## Il punto della situazione:

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE	cBa	Locale (Frame, cHa)
COSTRUTTIVAMENTE	<b>OVERLAP ALGEBRA</b>	Formal Topology (?)

**overlap algebra** = come un INTUZIONISTA vede i sottoinsiemi

**cHa** = quello che un CLASSICO pensa  
che un INTUZIONISTA veda  
dei sottoinsiemi

# Simmetria e dualità in topologia.

Classicamente: *chiuso* = *complementare* di un *aperto*.

Conseguenza: *topologia* = la struttura degli aperti  
(oppure la struttura dei chiusi).

# Simmetria e dualità in topologia.

Classicamente: *chiuso* = *complementare* di un *aperto*.

Conseguenza: *topologia* = la struttura degli aperti  
(oppure la struttura dei chiusi).

Costruttivamente:

dualità fra  $\text{cl}$  (operatore di chiusura) e  $\text{int}$  (operatore di interno)

$$\begin{aligned} a \in \text{cl } X &\iff \forall A \ (x \in A \rightarrow A \not\subseteq X) \\ a \in \text{int } X &\iff \exists A \ (x \in A \ \& \ A \subseteq X) \end{aligned}$$

## Quali sono i legami fra `cl` e `int`?

Classicamente:

$$\text{cl } X = -\text{int } -X \quad \text{int } X = -\text{cl } -X$$

## Quali sono i legami fra $\text{cl}$ e $\text{int}$ ?

Classicamente:

$$\text{cl } X = -\text{int} - X \quad \text{int } X = -\text{cl} - X$$

Costruttivamente:

$$\text{cl } X \dashv \text{int } Y \quad \iff \quad X \dashv \text{int } Y$$

## Quali implicazioni per la topologia formale?

- Accanto alla copertura  $\triangleleft$  per descrivere il frame degli aperti si ha un'altra relazione  $\times$  per la trattazione dei chiusi.
- Si ha un nuovo concetto di punto formale (punto ideale) che permette una definizione più agevole dei sottospazi.
- Si ottengono nuovi risultati sugli spazi sobri e nuove intuizioni sulle sequenze a scelta.
- La continuità si caratterizza come la commutatività di un diagramma.
- ...

## Soluzione del problema iniziale:

	insieme delle parti	spazio topologico
CLASSICAMENTE	cBa	Locale (Frame, cHa)
COSTRUTTIVAMENTE	<b>OVERLAP ALGEBRA</b>	Formal Topology ( <b>nuova</b> )

# Fondazione costruttiva della matematica

**Giovanni Sambin** & **Francesco Ciraulo**

Dip. di Matematica Pura ed Applicata  
Padova

Dip. di Matematica ed Applicazioni  
Palermo

*La ricerca logica in Italia*  
*Convegno in onore di Corrado Mangione*  
Milano, 10 - 11 Settembre 2009

# GRAZIE!