Semantica di Kripke per LJ*

mace@dsi.unive.it

Consideriamo il linguaggio proposizionale *Prop*, delle proposizioni $A, B, C, \ldots$ generate induttivamente. Innanzitutto, ammettiamo una proposizione costante $\perp$ e delle proposizioni primitive $P, Q, R, \ldots$ (gli *atomi*) che rappresentano gli ingredienti base per comporre le proposizioni. Inoltre, i connettivi che possiamo usare per comporre le proposizioni sono: &, $\vee$ e $\rightarrow$. Formalmente, ogni proposizione in *Prop* è generata induttivamente dalle regole:

$$\perp \in Prop \qquad P, Q, R, \ldots \in Prop$$

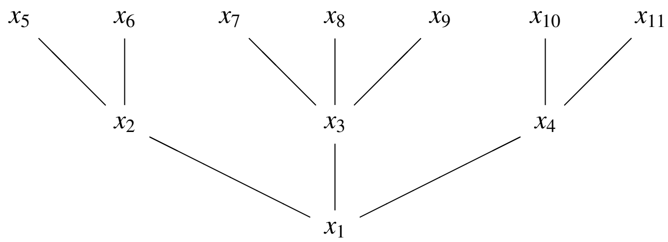
$$\frac{A \in Prop \quad B \in Prop}{A \& B \in Prop} \qquad \frac{A \in Prop \quad B \in Prop}{A \vee B \in Prop} \qquad \frac{A \in Prop \quad B \in Prop}{A \rightarrow B \in Prop}$$

Questa definizione permette di fare dimostrazioni per induzione sulla struttura delle proposizioni, ovvero sul modo in cui sono state create sintatticamente.

Modelli. I modelli matematici che useremo per interpretare le proposizioni sono *alberi*. Gli alberi rappresentano il nostro modo di apprendere *positivamente*: man mano che procediamo nel ragionamento, aumentiamo il numero di informazioni possedute. Un albero rappresenta il modo di procedere della nostra conoscenza. La *radice* rappresenta il punto di partenza: lo stadio iniziale del ragionamento. I vari *cammini* rappresentano le varie possibilità che abbiamo nel procedere nel ragionamento. I *nodi* rappresentano gli stadi della conoscenza. La struttura dell'albero definisce un ordine gli stadi di conoscenza. Due stadi di conoscenza sono comparabili se sono su di uno stesso cammino che parte dallo stadio di conoscenza iniziale (la radice), il minore dei due è quello che si trova più vicino alla radice, in pratica quello che viene prima nel processo di conoscenza.

*Note del Corso di Logica per Informatica (a.a. 2005/2006), Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Padova

Esempio 1.



In questo caso x_1 è minore di ogni nodo. Inoltre $x_1 \leq x_2 \leq x_5$, $x_3 \leq x_7$, $x_3 \leq x_8$, $x_3 \leq x_9$, mentre x_2 ed x_4 non sono confrontabili.

Valutazione. Le proposizioni primitive rappresentano le informazioni di base che abbiamo in uno stadio di conoscenza. Tali proposizioni sono del tipo "esco," "piove," "c'è il sole," "prendo l'ombrello," "prendo il cappello." Dobbiamo sapere quali di esse valgono ad ogni stadio della conoscenza, dobbiamo quindi definire una funzione che associ ogni proposizione primitiva con gli stadi in cui tale proposizione è verificata. Se chiamiamo *Atm* l'insieme delle proposizioni primitive, dobbiamo fissare una funzione che ci dice in quali stadi di conoscenza una proposizione primitiva è verificata. Quindi, fissato un albero T, indichiamo con $n(T)$ l'insieme dei suoi nodi e consideriamo tutti i possibili sottoinsiemi di $n(T)$, che indichiamo con $\mathcal{P}(n(T))$. Introduciamo la *valutazione* di ogni proposizione primitiva $P \in Atm$

$$V_{Atm} : Atm \longrightarrow \mathcal{P}(n(T))$$

In pratica $V_{Atm}(P)$ definisce il gruppo di nodi in cui la proposizione primitiva P è verificata. Come abbiamo già detto la nostra conoscenza progredisce in modo 'positivo:' una volta scoperto che vale una proposizione, essa non verrà più confutata. Questo vuol dire che se una proposizione primitiva è verificata in uno stadio della conoscenza, allora lo sarà in ogni stadio successivo. Nel modello questo si traduce chiedendo che

$$\begin{aligned}&\text{se } x \in n(T) \text{ è tale che } x \in V_{Atm}(P) \text{per una proposizione primitiva } P,\\ &\qquad\qquad \text{allora } y \in V_{Atm}(P) \text{ per ogni } y \geq x. \qquad (1)\end{aligned}$$

La valutazione V_{Atm} viene assunta a priori e da essa si definisce le valutazione V di tutte le proposizioni che di possono scrivere nel linguaggio della logica, combinando con i vari connettivi. La valutazione V viene definita per induzione sulla struttura delle proposizioni.

Definizione 2 (Valutazione)**.** *Consideriamo un albero e fissiamo una funzione $V_{Atm}()$ sulle proposizioni primitive. La valutazione delle proposizioni $V()$ è definita induttiva-*

mente sulla struttura delle proposizioni come segue:

$$
\begin{array}{lll}
x \,\varepsilon\, V(P) & \textit{se e solo se} & x \,\varepsilon\, V_{Atm}(P) \\
x \,\varepsilon\, V(\bot) & \textit{mai} & \\
x \,\varepsilon\, V(A\&B) & \textit{se e solo se} & x \,\varepsilon\, V(A) \cap V(B) \\
x \,\varepsilon\, V(A \vee B) & \textit{se e solo se} & x \,\varepsilon\, V(A) \cup V(B) \\
x \,\varepsilon\, V(A \rightarrow B) & \textit{se e solo se} & \textit{per ogni } y \geq x,\ \textit{se } y \,\varepsilon\, V(A) \textit{ allora } y \,\varepsilon\, V(B)
\end{array}
$$

In particolare, diremo che *"la proposizione A è valida nello stadio di conoscenza y"* se $y \,\varepsilon\, V(A)$. Inoltre diremo che *"una proposizione è valida in un albero di conoscenza se è valida in ognuno dei nodi dell'albero stesso."*

Un commento sulla valutazione di $A \rightarrow B$. Per dire che $A \rightarrow B$ è valida in uno stadio di conoscenza, devo sapere che: in ogni stadio successivo, qualora sapessi che A è valida, allora lo deve essere anche B. Questo è importante per la negazione: se so che vale A in un determinato stadio, allora A sarà valida in ogni stadio successivo, se so che vale $\neg A$ allora non sarà mai verificata in uno stadio successivo di conoscenza. Ci possono essere stadi un cui non so se una proposizione sia valida o no (vedi Esercizio 9).

Formalmente, dire che $x \,\varepsilon\, A$ significa che $y \,\varepsilon\, V(A)$ implica $y \,\varepsilon\, V(\bot)$ per ogni $y \geq x$. Visto che non può essere che $y \,\varepsilon\, V(\bot)$, l'ultima affermazione significa che $v \not\varepsilon V(A)$. Possiamo riassumere questo ragionamento in una regola pratica.

Regola per verificare quando $x \,\varepsilon\, V(\neg A)$:

$$x \,\varepsilon\, V(\neg A) \textit{ se e solo se } y \not\varepsilon V(A) \textit{ per ogni } y \geq x \tag{2}$$

La Definizione 2 è formulata in modo tale da rispettare la richiesta in di monotonia in (1), e quindi rende positivo il processo di conoscenza su tutte le proposizioni: se ad uno stadio di conoscenza si conoscono valide certe proposizioni, allora queste saranno valide in tutti gli stadi successivi. Questa affermazione si formalizza nel seguente lemma.

Lemma 3 (Monotonia)**.** *Sia fissata una valutazione $V_{Atm}()$ sulle proposizioni primitive che goda della proprietà (1) e consideriamo la sua estensione su tutte le proposizioni, data secondo la Definizione 2. Per ogni proposizione A, se $x \,\varepsilon\, V(A)$ allora $y \,\varepsilon\, V(A)$ per ogni $y \geq x$.*

Dimostrazione. Per induzione sulla struttura delle proposizioni.

Caso base. Dobbiamo dimostrare che il Lemma vale per proposizioni primitive e $\bot$. Sulle proposizioni primitive $V()$ coincide con $V_{Atm}()$ e quindi i lemma è verificato grazie alla proprietà (1). Per $\bot$ il lemma è verificato grazie alla Definizione 2, dal momento che nessun nodo appartiene a $V(\bot)$.

Passo induttivo. Dobbiamo considerare i connettivi, che ci permettono di costruire tutte le proposizioni partendo dalle proposizioni primitive. I casi da discutere sono tre.

(&) Consideriamo la proposizione $A\&B$ e assumiamo, per ipotesi induttiva, che il lemma valga per le sue sotto-proposizioni. In particolare l'ipotesi induttiva ci dice che il lemma vale per A e B, ovvero:

a. se $x \,\varepsilon\, V(A)$ allora $y \,\varepsilon\, V(A)$ per ogni $y \geq x$

b. se $x \,\varepsilon\, V(B)$ allora $y \,\varepsilon\, V(B)$ per ogni $y \geq x$

Sfruttando queste due ipotesi dobbiamo provare che il lemma è verificato per $A\&B$, ovvero

c. se $x \,\varepsilon\, V(A\&B)$ allora $y \,\varepsilon\, V(A\&B)$ per ogni $y \geq x$

Assumiamo quindi che $x \,\varepsilon\, V(A\&B)$. La Definizione 2 dice che $x \,\varepsilon\, V(A) \cap V(B)$. Questo significa che $x \,\varepsilon\, V(A)$ e $x \,\varepsilon\, V(B)$. Il punto a. della ipotesi induttiva dice allora che $y \,\varepsilon\, V(A)$ per ogni $y \geq x$, mentre il punto b. dice allora che $y \,\varepsilon\, V(B)$ per ogni $y \geq x$. Possiamo concludere che $y \,\varepsilon\, V(A) \cap V(B)$ per ogni $y \geq x$ e questo ci dice appunto che $y \,\varepsilon\, V(A\&B)$ per ogni $y \geq x$, secondo la Definizione 2. Abbiamo quindi provato il punto c. come richiesto.

($\vee$) Consideriamo la proposizione $A \vee B$ e assumiamo ora, per ipotesi induttiva, che il lemma valga per le sue sotto-proposizioni. In particolare per A e B:

a. se $x \,\varepsilon\, V(A)$ allora $y \,\varepsilon\, V(A)$ per ogni $y \geq x$

b. se $x \,\varepsilon\, V(B)$ allora $y \,\varepsilon\, V(B)$ per ogni $y \geq x$

Sfruttando queste due ipotesi dobbiamo ora provare che il lemma è verificato per $A \vee B$, ovvero

c. se $x \,\varepsilon\, V(A \vee B)$ allora $y \,\varepsilon\, V(A \vee B)$ per ogni $y \geq x$

Assumiamo quindi che $x \,\varepsilon\, V(A \vee B)$. La Definizione 2 dice che $x \,\varepsilon\, V(A) \cup V(B)$ e cioé che $x \,\varepsilon\, V(A)$ oppure $x \,\varepsilon\, V(B)$. Assumendo che $x \,\varepsilon\, V(A)$, il punto a. della ipotesi induttiva dice che $y \,\varepsilon\, V(A)$ per ogni $y \geq m$, e quindi $y \,\varepsilon\, V(A) \cup V(B)$ per ogni $y \geq x$. Analogamente, assumendo che $x \,\varepsilon\, V(B)$ possiamo concludere che $y \,\varepsilon\, V(A) \cup V(B)$ per ogni $y \geq x$, grazie al punto b. della ipotesi induttiva. Considerando la Definizione 2, possiamo quindi concludere che se $x \,\varepsilon\, V(A \vee B)$ allora $y \,\varepsilon\, V(A \vee B)$ per ogni $y \geq x$ e il punto c. è verificato.

($\rightarrow$) Consideriamo infine la proposizione $A \rightarrow B$. In questo caso, possiamo dimostrare il lemma anche senza sfruttare le ipotesi induttive. Utilizzando solo la Definizione 2, mostriamo infatti che

se $x \,\varepsilon\, V(A \rightarrow B)$ allora $y \,\varepsilon\, V(A \rightarrow B)$ per ogni $y \geq x$

Assumiamo allora che $x \,\varepsilon\, V(A \rightarrow B)$. Secondo la Definizione 2 questo significa che per ogni $y \geq x$ se $y \,\varepsilon\, V(A)$ allora $y \,\varepsilon\, V(B)$. Consideriamo ora $y \geq x$ e prendiamo $y' \geq y$. Per la proprietà dell'ordine in un albero, $y \geq x$ e $y' \geq y$ ci dice che $y' \geq x$ e quindi, per ipotesi induttiva, sappiamo che se $y' \,\varepsilon\, V(A)$ allora $y' \,\varepsilon\, V(B)$. Visto che questa proprietà vale per qualsiasi $y' \geq y$, possiamo concludere che $y \,\varepsilon\, V(A \rightarrow B)$, come richiesto. □

In letteratura, la valutazione di una proposizione può essere definita anche usando il simbolo $\Vdash$, chiamato relazione di*forcing*. Si può scrivere $x \Vdash A$, e si legge '*x forza A*, se $x \,\varepsilon\, V(A)$. Formalmente, si definisce:

$$x \Vdash A \text{ se e solo se } x \,\varepsilon\, V(A).$$

In questi termini, possiamo fare un confronto con la valutazione, o verità, classica (quella data dalle regole di LK). La verità classica è *statica:* c'è un solo stadio di conoscenza, quello di "come stanno le cose", ovvero la conoscenza di un essere onnisciente. La verità intuizionistica (quella data dalle regole di LJ) è *dinamica:* ci sono vari stadi di conoscenza. Con una unica, ma importantissima condizione: se da uno stadio x si passa ad un successivo stadio y, e se allo stadio x la proposizione A è vera (oppure: A è valida allo stadio x), allora A è vera (valida) anche allo stadio y. Chiamiamo questa condizione: monotonia, o stabilità.

In un certo senso, se il classico si considera onnisciente, l'intuizionista è molto conservatore, perché vuole credere in A oggi (stadio x) solo se già conosce che sia oggi, sia domani e sempre (ogni stadio y a cui si arriva a partire da x) crederà in A. È per questo che ha bisogno di argomentazioni positive, nel senso che non siano modificate da aumento di informazione (come: esistenza di un certo algoritmo, o di una verifica). La mancanza di una certa informazione (tipicamente: il fatto che in x non si ha A come vera) non può quindi essere considerata una buona argomentazione, perché ogni mancanza di informazioni può essere colmata in uno stadio di conoscenza successivo, e quindi contraddire la monotonia.

La definizione di validità delle proposizioni si estende ai sequenti. Diremo che un sequente è valido in un nodo se dalla validità delle sue premesse segue la validità della sua conclusione. Diamone la definizione formale.

Definizione 4 (Validità di un sequente)**.** *Fissato un albero T diciamo che il sequente $A_1, \ldots, A_r \vdash B$ (con $r \geq 0$) è valido in T se per ogni $x \,\varepsilon\, T$:*

$$\textit{se } x \,\varepsilon\, V(A_1) \ldots x \,\varepsilon\, V(A_r) \textit{ allora } x \,\varepsilon\, V(B)$$

Inoltre diciamo che un sequente è valido *se è valido in ogni albero.*

Notate che la definizione è indipendente dall'ordine in cui le proposizioni sono scritte nelle premesse del sequente. Possiamo quindi dire che la definizione di validità di un sequente rispetta lo *scambio* tra premesse.

Osservazione 5. La definizione precedente contempla anche il caso del sequente $\vdash B$ senza alcuna premessa. In questo caso la definizione dice che $\vdash B$ *è valido in un albero T se $x \,\varepsilon\, V(B)$ per ogni nodo x di T.*

Osservazione 6. La definizione precedente piò essere riletta nel caso delle singole proposizioni come una inclusione tra sottoinsiemi di nodi. Considerando il sequente $A \vdash B$ la Definizione 4 dice che $A \vdash B$ *è valido in un albero T se, per ogni nodo $x \in T$, $x \,\varepsilon\, V(A)$ implica $x \,\varepsilon\, V(B)$* e questo significa $V(A) \subseteq V(B)$.

Vediamo ora un teorema che lega le derivazioni che possiamo fare col calcolo LJ e la semantica che abbiamo appena definito. La dimostrazione che mostriamo è diversa da quella vista a lezione. La prova dl teorema sarà un esempio di induzione sulla struttura della prova. Faremo praticamente vedere che le regole preservano la validità. La prova fatta a lezione, invece, ha mostrato che le equazioni definitorie rispettano la validità. I passaggi di quest'ultima dimostrazione possono essere ritrovati nella dimostrazione riportata di seguito.

Teorema 7 (Validità)**.** *Ogni sequente derivabile in LJ è valido.*

Dimostrazione. L'enunciato del teorema dice che se riusciamo a derivare il sequente $A_1 \dots A_s \vdash B$ in LJ allora fissato un albero T qualsiasi, se $x \in T$ è tale che $x\,\varepsilon\,A_1 \dots x\,\varepsilon\,A_r$ allora $x\,\varepsilon\,B$.

Fissiamo un albero generico T e dimostriamo il teorema nel caso di T, ovvero cerchiamo di provare

$$\text{Ogni sequente derivabile in LJ è valido in } T. \tag{3}$$

La genericità dell'albero considerato ci permette di concludere che (3) è verificata su tutti gli alberi e quindi possiamo affermare di aver dimostrato il teorema.

Dimostriamo allora (3) procedendo per induzione sul numero di regole applicate nella derivazione di un sequente.

Caso base. La base dell'induzione è rappresentata dalle derivazioni di lunghezza 1, ovvero quelle che provano un sequente applicando regole senza premesse, che sono le *identità* e la regola del falso. Iniziamo dalle identità

$$A \vdash A$$

Si vede subito che questo sequente è valido in T, basta osservare che la sua validit'a si traduce un $V(A) \subseteq V(A)$ grazie all'Osservazione 6.

La regola del falso dice invece che

$$A_1, \dots, A_r, \perp \vdash B$$

dobbiamo quindi dimostrare che $A_1, \dots, A_r, \perp \vdash B$ è valido in T, cioé che per ogni nodo $x \in T$ se $x\,\varepsilon\,V(A_1), \dots, x\,\varepsilon\,V(A_r)$ e $x\,\varepsilon\,V(\perp)$ allora $x\,\varepsilon\,V(B)$. Consideriamo il nodo $x \in T$ e assumiamo che $x\,\varepsilon\,V(A_1), \dots, x\,\varepsilon\,V(A_r)$ e $x\,\varepsilon\,V(\perp)$. In particolare assumere che $x\,\varepsilon\,V(\perp)$ significa assumere una affermazione falsa ($x\,\varepsilon\,V(\perp)$ non è mai verificato, per nessun nodo!) dalla quale possiamo derivare qualsiasi affermazione e in particolare possiamo concludere che $x\,\varepsilon\,V(B)$ dimostrando quello che cercavamo.

Passo Induttivo. Le derivazioni che usano più di una regola devono terminare con una regola con delle premesse. Tali regole sono le regole di formazione e riflessione dei connettivi, le regole strutturali e la regola di taglio. Consideriamo allora una derivazione che applichi più di una regola e assumiamo per ipotesi induttiva che il teorema valga per tutte le derivazioni che applicano almeno una regola in meno della derivazione considerata. La dimostrazione procede per casi, considerando l'ultima regola applicata nella derivazione considerata.

$$\frac{A_1, \dots, A_r, A \vdash C}{A_1, \dots, A_r, A\&B \vdash C}\ \&r$$

Se la derivazione si conclude con $\&r$, per induzione sappiamo che $A_1, \dots, A_r, A \vdash C$ è valido in T. questo significa che se $x\,\varepsilon\,V(A_1), \dots, x\,\varepsilon\,V(A_r)$ e $x\,\varepsilon\,V(A)$ allora

$x \,\varepsilon\, V(C)$. Ora dire $x \,\varepsilon\, V(A_1), \ldots, x \,\varepsilon\, V(A_r)$ e $x \,\varepsilon\, V(A\&B)$ implica $x \,\varepsilon\, V(A_1), \ldots,$ $x \,\varepsilon\, V(A_r)$ e $x \,\varepsilon\, V(A)$, dal momento che $x \,\varepsilon\, V(A\&B)$ significa $x \,\varepsilon\, V(A) \cap V(B)$ per definizione, e quindi otteniamo $n \,\varepsilon\, V(C)$. Possiamo concludere che la conclusione della derivazione è valida in T.

$$\frac{A_1, \ldots, A_r, A \vdash B}{A_1, \ldots, A_r \vdash A \to B} \to f$$

Se la derivazione si conclude con $\to f$, l'ipotesi induttiva ci dice che, preso $x' \in T$, $x' \,\varepsilon\, V(A_1), \ldots, x' \,\varepsilon\, V(A_r)$ e $x' \,\varepsilon\, V(A)$ allora $x' \,\varepsilon\, V(B)$. Sfruttando questa ipotesi possiamo provare che il sequente $A_1, \ldots, A_r \vdash A \to B$ è valido in T. Fissiamo ora $x \in T$ e assumiamo che

$$x \,\varepsilon\, V(A_1), \ldots, x \,\varepsilon\, V(A_r). \tag{4}$$

Dobbiamo provare che $x \,\varepsilon\, V(A \to B)$, ovvero che per ogni $y \geq x$ se $y \,\varepsilon\, V(A)$ allora $y \,\varepsilon\, V(B)$.

Prendiamo quindi $y \geq x$ e supponiamo che $y \,\varepsilon\, V(A)$. Grazie a (4), il Lemma 3 ci dice che $y \,\varepsilon\, V(A_1), \ldots y \,\varepsilon\, V(A_r)$. Quindi otteniamo $y \,\varepsilon\, V(A_1), \ldots y \,\varepsilon\, V(A_r), y \,\varepsilon (A)$ e, per ipotesi induttiva, questo ci dice che $y \,\varepsilon\, V(B)$. Vista la genericità di $y \geq x$, possiamo concludere che $x \,\varepsilon\, V(A \to B)$ come cercavamo.

Analogamente si verificano i passi induttivi riguardanti le altre regole

$$\frac{A_1, \ldots, A_r \vdash A \quad A_1, \ldots, A_r \vdash B}{A_1, \ldots, A_r \vdash A\&B} \&f$$

$$\frac{A_1, \ldots, A_r, A \vdash C \quad A_1, \ldots, A_r, B \vdash C}{A_1, \ldots, A_r, A \vee B \vdash C} \vee f \qquad \frac{A_1, \ldots, A_r \vdash A}{A_1, \ldots, A_r \vdash A \vee B} \vee r$$

$$\frac{B, A'_1, \ldots, A'_{r'} \vdash C \quad A_1, \ldots, A_r \vdash A}{A_1, \ldots, A_r, A \to B, A'_1, \ldots, A'_{r'} \vdash C} \to r$$

$$\frac{A_1, \ldots, A_r \vdash B}{A_1, \ldots, A_r, A \vdash B} \, ind \qquad \frac{A_1, \ldots, A_r, A, A \vdash B}{A_1, \ldots, A_r, A \vdash B} \, con$$

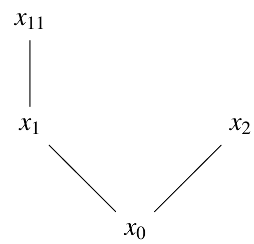
$$\frac{A_1, \ldots, A_r \vdash B \quad B, A'_1, \ldots, A'_{r'} \vdash C}{A_1, \ldots, A_r, A'_1, \ldots, A'_{r'} \vdash C} \, taglio$$

□

Si può provare, ma qui non lo mostriamo, che il precedente teorema può essere invertito. Si può quindi ottenere il seguente

Teorema 8 (Completezza)**.** *Ogni sequente valido è derivabile in LJ.*

Vediamo ora qualche esercizio, considerando l'albero T:



Esercizio 9. *Provare che* $\vdash P \vee \neg P$ *non è valido in T se* $V_{Atm}(P) = \{x_1, x_{11}\}$. *Provare, invece, che* $\vdash P \vee \neg P$ *è valido scegliendo* $V_{Atm}(P) = \emptyset$.

Svolgimento. Per provare che $\vdash P \vee \neg P$ non è valido in T dobbiamo verificare che $V(P \vee \neg P)$ non coincide con tutto l'insieme $n(T)$ dei nodi di T. Visto che $V(P \vee \neg P)$ è definita induttivamente sulla struttura della formula, procediamo per passi sulle sottoformule di $P \vee \neg P$.

$$\begin{array}{rcl} V(P) & = & V_{Atm}(P) = \{x_{11}, x_1\} \\ V(\neg P) & = & \{x_2\} \\ V(P \vee \neg P) & = & \{x_{11}, x_1, x_2\} \end{array}$$

Si vede che $x_0 \notin V(P \vee \neg P)$, quindi $V(P \vee \neg P) \neq n(T)$. Possiamo concludere che $P \vee \neg P$ non è valido in T con la prima valutazione.

Supponiamo ora che $V'_{Atm}(P) = \emptyset$, allora:

$$\begin{array}{rcl} V'(P) & = & V'_{Atm}(P) = \emptyset \\ V'(\neg P) & = & \{x_{11}, x_1, x_2, x_0\} \\ V'(P \vee \neg P) & = & \{x_{11}, x_1, x_2, x_0\} \end{array}$$

In questo caso $V'(P \vee \neg P) = n(T)$, quindi $P \vee \neg P$ è valido in T con la seconda valutazione delle proposizioni atomiche.

Osservazione 10. Il precedente esercizio mostra che per affermare che $\neg P$ vale in uno stadio di conoscenza, dobbiamo essere sicuri che P non potrà mai essere valida in nessuno stadio di conoscenza successivo (superiore nell'ordine dell'albero). La monotonia della valutazione (Lemma 3) testimonia appunto la 'positività' delle informazioni che otteniamo: una volte raggiunte non potranno più essere confutate. Potremmo dire che nello stadio x_1 dell'esercizio precedente la nostra conoscenza di P è in un certo modo 'incerta' e non abbiamo abbastanza informazioni per capire se sia valida P o $\neg P$. Quando arriviamo allo stadio di conoscenza x_2 acquistiamo maggiori informazioni e sappiamo che P è valida.

Esercizio 11. *Provare che* $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$ *non è valido in T se* $V_{Atm}(P) = \{x_1, x_{11}\}$, $V_{Atm}(Q) = \{x_2\}$. *Definire una nuova valutazione* $V_{Atm}()$ *in modo che il sequente sia valido in* T.

Svolgimento. Per provare che $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$ non è valido in T dobbiamo verificare che $V((P \to Q) \vee (Q \to P))$ non coincide con tutto l'insieme $n(T)$ dei nodi di T. Visto che la definizione di $V((P \to Q) \vee (Q \to P))$ è data induttivamente sulla struttura della formula, procediamo per passi sulle sue sotto-formule.

$$\begin{array}{rcl} V(P) & = & V_{Atm}(P) = \{x_{11}, x_1\} \\ V(Q) & = & V_{Atm}(Q) = \{x_2\} \\ V(P \to Q) & = & \{x_2\} \\ V(Q \to P) & = & \{x_{11}, x_1\} \\ V((P \to Q) \vee (Q \to P)) & = & \{x_{11}, x_1, x_2\} \end{array}$$

Si vede che $x_0 \not\in V((P \to Q) \vee (Q \to P))$, quindi $V((P \to Q) \vee (Q \to P)) \neq n(T)$. Possiamo concludere che $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ non è valido in T con la prima valutazione.

Cerchiamo ora di modificare $V_{Atm}()$ in modo da rendere $V((P \to Q) \vee (Q \to P))$ valido. Proviamo con $V'_{Atm}(P) = \{x_1, x_{11}\}$ e $V'_{Atm}(Q) = \{x_{11}\}$. In questo caso:

$$\begin{array}{rcl} V'(P) & = & V'_{Atm}(P) = \{x_{11}, x_1\} \\ V'(Q) & = & V'_{Atm}(Q) = \{x_{11}\} \\ V'(P \to Q) & = & \{x_{11}\} \\ V'(Q \to P) & = & \{x_{11}, x_1, x_2, x_0\} \\ V'((P \to Q) \vee (Q \to P)) & = & \{x_{11}, x_1, x_2, x_0\} \end{array}$$

In questo caso $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ è valido, in quanto $V'((P \to Q) \vee (Q \to P)) = n(T)$.

Esercizio 12. *Considerate le proposizioni atomiche P, Q. Definite una valutazione $V_{Atm}()$ in modo che la proposizione $(P\&Q) \to (P \vee Q)$ sia valida in T. Definite poi una valutazione $V_{Atm}()$ in modo che lo stesso sequente non sia valido in T (se non ci riuscite ci sarà un motivo...)*

Svolgimento. Proviamo con $V_{Atm}(P) = \{x_{11}, x_1\}$ e $V_{Atm}(Q) = \{x_2\}$. Per provare $(P\&Q) \to (P \vee Q)$ valida in T dobbiamo verificare che $V((P \to Q) \vee (Q \to P))$ coincide con tutto l'insieme $n(T)$ dei nodi di T. Ancora, procediamo induttivamente

$$\begin{array}{rcl} V(P) & = & V_{Atm}(P) = \{x_{11}, x_1\} \\ V(Q) & = & V_{Atm}(Q) = \{x_2\} \\ V(P\&Q) & = & \emptyset \\ V(Q \vee P) & = & \{x_{11}, x_1, x_2\} \\ V((P\&Q) \to (P \vee Q)) & = & \{x_{11}, x_1, x_2, x_0\} \end{array}$$

Abbiamo mostrato che $V((P\&Q) \to (P \vee Q))$ coincide con l'insieme dei nodi di T, quindi $(P\&Q) \to (P \vee Q)$ è valida in T.

Per il secondo punto, ricodate il teorema di validità...