Regole di inferenza per LK (originali)

Identitá: $A \vdash A$ **Falso:** $\Gamma, \bot \vdash \Delta$

CONNETTIVI:

$$\&: \quad \boxed{\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ ** \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ **} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}$$

$$\vee: \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad \boxed{\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ ** \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ **}$$

$$\rightarrow: \quad \boxed{\frac{\Gamma' \vdash A, \Delta' \quad \Gamma'', B \vdash \Delta''}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ **} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}$$

$$\neg: \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

Indebolimento:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta}$$

Contrazione:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

QUANTIFICATORI:

$$\frac{\Gamma, A(c) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta}\ * \qquad \frac{\Gamma \vdash A(z), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ \textit{condizione}$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \Delta}\ \textit{condizione} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(c), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta}\ *$$

Condizione : z **deve essere non libera** nel contesto Γ, Δ.

Da notare Notare **le regole della negazione** (piu' comode; dimostrare che sono derivabili). Semplicemente, spostano la formula; nulla viene cancellato.

Osservare anche che, poiche in LK disponiamo di contrazione anche a destra, possiamo applicare la tecnica gia' vista, ed ***evitare di fare scelte***. Se sostituiamo le regole nei box con il corrispondente $\&+$ *contr.*, $\vee+$ *contr.*, $\rightarrow +$*contr.*, tutte le regole sui connettivi diventano ad applicazione automatica.

Regole di inferenza per LK (derivate)

Nella costruzione di prove, e' quindi possibile usare queste regole (derivate), in modo da non dover mai fare scelte.

Identitá: $A \vdash A$ **Falso:** $\Gamma, \bot \vdash \Delta$

CONNETTIVI:

$$\&: \quad \boxed{\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}\ \& + contr} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A\&B, \Delta}$$

$$\vee: \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad \boxed{\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee + contr}$$

$$\to: \quad \boxed{\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to +contr} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}$$

$$\neg: \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

Indebolimento:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Sigma, \Delta}$$

Contrazione:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

QUANTIFICATORI:

$$\frac{\Gamma, A(c) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta}\ * \qquad \frac{\Gamma \vdash A(z), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A(x), \Delta}\ condizione$$

$$\frac{\Gamma, A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash \Delta}\ condizione \qquad \frac{\Gamma \vdash A(c), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta}\ *$$

Condizione : z **deve essere non libera** nel contesto Γ, Δ.

In pratica: connettivi Con quester regole, la **dinamica** di LK e' completamente piatta: qualunque formula decidiamo di decomporre, va bene. Nel senso che, se esiste una derivazione, qualunque scelta facciamo stiamo costruendo una derivazione valida.

Alcune scelte danno luogo a derivazioni piu' compatte di altre, ma qualunque scelta facciamo, se una derivazione e' possibile, ne stiamo costruendo una. Viceversa, se non riusciamo a costruire una derivazione, non ci riusciremo con nessuna altra scelta.

Esercizio: provare a derivare in LK $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ oppure $A \to B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \bot$.

Abbiamo bisogno di **usare contrazione** solo per risolvere i problemi legati a $\forall$ a sinistra e $\exists$ a destra.

In pratica: quantificatori In LK, possiamo usare la tecnica del generatore non solo per $\forall$ a sinistra, ma anche $\exists$ a destra.

*A sinistra, possiamo tenere una copia di $\forall x A(x)$, da usare come **generatore** di $A(x_i)$ (secondo il bisogno di variabili)*

*A destra, possiamo tenere una copia di $\exists x A(x)$, da usare come **generatore** di $A(x_i)$ (secondo il bisogno di variabili)*

$$\boxed{\frac{\Gamma, \forall x A(x), A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A(z), \exists x A(x), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A(x), \Delta}}$$

Esercizio: provare a derivare il "teorema del befitore.

$$\exists x(B(x) \to \forall x(Bx))$$