Esempi di formalizzazione di frasi

1. Consideriamo due domini, quello delle persone all'universita' di Padova (x,y,z ...) e quello dei corsi (w,w',w"...). Prendiamo:

A(x,y):	x ammira y
B(x,w):	x ama w
P(x):	x e' professore
S(x):	x e' studente
L(w):	w e' un corso
m:	Miriam (persona!)

Provare a formalizzare alcune di queste sentenze (non sara' possibile farle tutte fino alla prossima lezione):

1. Miriam ammira ogni professore
2. Alcuni professori ammirano Miriam
3. Miriam ammira se stessa
4. Nessuno studente ama ogni corso
5. Nessun corso e' amato da tutti gli studenti
6. Non ci sono corsi amati da nessuno studente

Si tratta di esprimere la stessa idea, in un linguaggio che puo' dire solamente tutti, esiste, non tutti, non esiste....

Notare che:

- In generale, la formalizzazione non e' unica (vedi sotto)
- A(x,y) esprime una relazione tra individui. Che senso ha $A(m, P(x))$?, che suona cosi: *Miriam ammira "x e' professore"*...

1. Il primo passo e' capire cosa vogliamo dire: Miriam ammira tutti gli individui che sono professori.

NO: $\forall x(P(x) \& A(m, x))$, che dice ''per tutti gli individui x, x e' professore, e Miriam lo ammira". E gli x che sono studenti? La formula non corrisponde a quello che volevamo esprimere. Infatti, l'ammirazione di Miriam e' selettiva e condizionata.

BENE: $\forall x(P(x) \rightarrow A(m, x))$

Il connettivo $\rightarrow$ *seleziona* tra tutti gli individui del dominio, quelli che hanno la proprieta' che vogliamo (la qualita' per essere ammirati da Miriam.)

2. Qui vogliamo dire che qualcuno ama Miriam $\exists x A(x, m)$, e specificare che quel qualcuno e' un professore. Quindi

BENE: $\exists x(P(x) \& A(x, m))$

NO: $\exists x(P(x) \rightarrow A(x, m))$

Attenzione, il problema qui e' sottile. Se il mio dominio non comprende solo professori, mi basta prendere lo ***studente Rodolfo*** : r, e qualunque cosa lui pensi di Miriam, e vero che $P(r) \rightarrow A(x, m)$ (se mia nonna avesse le ruote...).

4.-6. Queste sentenze sono complesse. Conviene occuparsi di una variabile alla volta.

Proviamo per esempio a quantificare solo sugli studenti, e fissiamo un corso, per esempio logica: l.

Vogliamo iniziare formalizzando

"Nessuno studente ama logica"

NO: $\neg\forall x B(x, l)$ che si legge "Non tutti gli studenti amano logica" (Considerate per esempio: "Non tutti gli studenti passano l'esame" oppure "Nessuno studente passa l'esame"? Quale situazione e' piu' drammatica?)

BENE: $\forall x(S(x) \rightarrow \neg B(x, l))$

BENE: $\neg\exists x(S(x) \& B(x, l))$

Due modi di formalizzare la stessa idea?! Quale e' la migliore? Entrambe le formalizzazioni sono buone.

Come facciamo ad essere sicuri? Come possiamo dire che due specifiche che sembrano cosi' diverse in realta' esprimono la stessa cosa?

Qui interviene il calcolo! Dimostrare che

$\forall x(S(x) \rightarrow \neg B(x, l)) \doteq \neg\exists(S(x) \& B(x, l))$

E l'esercizio completo? Quantifichiamo anche la seconda variabile. Per esempio, e' corretto:

$\forall w(L(w) \rightarrow \exists x(S(x) \& \neg B(x, w)))$?

Altre idee? (CONSIGLIO: cercare di esprimere l'idea della sentenza in modo semplice!!)

Nota Molto spesso:

- con $\forall$ vogliamo selezionare gli individui che soddisfano una certa proprieta', ed usiamo $\rightarrow$.
- con $\exists$ vogliamo specificare tutte le proprieta' che caratterizzano l'individuo che diciamo esista, ed usiamo &.

Esercizio. Come formalizzereste la frase "non tutti gli uccelli volano"?