**Logica, 22 giugno 2006. PARTE II.**

**ESEMPI DI SOLUZIONE POSSIBILE**

**Il punteggio associato ad ogni esercizio e' a titolo indicativo (ed espresso in 30esimi).**

**Esercizio 3.** Ricordiamo che questo tipo di esercizio non ha una soluzione univoca.

**1.** (4.5 punti) *"Chi studia passa l'esame. Qualche studente non studia. Quindi qualche studente non passa l'esame."*

Utilizzando un'opportuna formalizzazione, dire se l'argomento e' corretto (specificare in che logica). In caso affermativo, fornire la derivazione.
Assumiamo come dominio l'insieme degli studenti.

**Svolgimento.** S(x): *"x studia"*, P(x): *"x passa l'esame"*.

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x)), \exists x \neg S(x) \vdash \exists x \neg P(x)$$

L'implicazione va solo nella direzione se studia allora passa l'esame. Questo non mi dice niente degli studenti che passano l'esame, ne' di quelli che non studiano.

`[ Siamo realisti. Uno studente brilante puo' essere capace di passare l'esame senza studiare. Oppure puo' farsi passare il compito. Etc...]`

**2.** (10.5 punti) *"Bernardo ama Alice. Bernardo ama tutte le donne che non sono complicate. Bernardo, se ama, ama una sola donna."*

Assumendo come dominio l'insieme delle donne, formalizzare la frase sopra. Si utilizzi il predicato

BA(x): Bernardo ama x

ed ogni altro predicato che si ritenga necessario.

Dire quale/quali delle seguenti affermazioni sono conseguenza della prima frase, specificando in che logica. Fornire la derivazione di quella/quelle deduzioni che ritenete corrette.

a. *"Alice come donna non e' complicata."*
b. *"Esistono donne che non sono complicate"*
c. *"Quando una donna non e' complicata, siamo sicuri che e' Alice"*

***Svolgimento.*** NC(x): x non e' complicata.
Dalla frase iniziale, segue la c. Infatti possiamo derivare:

$$BA(a), \ \ \forall x(NC(x) \rightarrow BA(x)), \ \ \forall x \forall y( \ BA(x) \& BA(y) \rightarrow (x = y)) \ \ \vdash \ \ NC(x) \rightarrow (x = a)$$

Ci sono diverse altre formalizzazioni possibili. Sotto ne discutiamo (solo) alcune.

**DETTAGLI E COMMENTI**

- *Bernardo ama tutte le donne che non sono complicate.*

  **BENE:** $\forall x(NC(x) \rightarrow BA(x))$

  ```
  Stessa struttura che ‘‘Miriam ammira ogni professore’’
  Notare il senso dell'implicazione: Se una donna non e' complicata, Bernardo la ama.
  Questo non gli impedisce di amare altri tipi di donna.
  BEN DISTINGUERE DA: Bernardo ama solo le donne che non sono complicate.
  ```

  **NO:** $\forall x(BA(x) \rightarrow NC(x))$
  Questo dice: Bernardo ama solo le donne che non sono complicate.

  **NO:** $\forall x(BA(x) \& NC(x))$
  Questo afferma che tutte le donne sono complicate, e amate da Bernardo.

- *Bernardo, se ama, ama una sola donna.*

  Tutte le seguenti vanno bene; le prime due sono piu' precise rispetto al testo (B. ama al piu' una donna), ma nel complesso tutte sono buone traduzioni.

  - $\forall x \forall y(\ BA(x) \& BA(y) \to (x = y))$
  - $\exists x BA(x) \to \forall x \forall y(\ BA(x) \& BA(y) \to (x = y))$
  - $\exists x(BA(x)\ \&\ \forall y(BA(y) \to (x = y)))$
    `[Dice: B. Ama un'unica donna. E' ok perche' sappiamo gia'` $BA(a)$`)]`
  - ... (altre formulazioni equivalenti)

- *Quando una donna non e' complicata, siamo sicuri che e' Alice*

  1. $NC(x) \to (x = a)$
  2. $\forall x(NC(x) \to (x = a))$

**COMMENTI** Ancora una volta, *la cosa importante e' il senso dell'implica*: se una donna non e' complicata, allora Bernardo la ama. Non so nulla del viceversa. ***Non so nemmeno se esistano donne che non sono complicate.***

La frase iniziale, puo' corrispondere a due scenari:
*Scenario 1.* Nel mondo di Bernardo, tutte le donne sono complicate. Quindi $NC(x)$ non e' mai vera. (Alice e' una donna complicata, come tutte le donne, ma comunque B. la ama)
*Scenario 2.* Nel mondo di Bernardo, esiste un'unica donna che non e' complicata. Questa donna e' Alice.

**Esercizio 4.** (9 punti) Consideriamo i sequenti $\Gamma \vdash \Delta$ le cui formule sono tutte costruite usando solo i connettivi & e $\vee$. Dimostrare (per induzione sulla struttura delle derivazioni) che se $\Gamma \vdash \Delta$ e' derivabile in LJ, allora $\Gamma$ e' non vuoto.

Indicare dove viene usata l'ipotesi induttiva.

***Cosa si vuole.*** Sapendo che $\Gamma \vdash \Delta$ e' conclusione di una derivazione, e che le sue formule usano solo i connettivi & ed $\vee$, vogliamo mostrare la proprieta':

"la parte sinistra del sequente e' non vuota."

Lo facciamo analizzando la derivazione di cui $\Gamma \vdash \Delta$ e' conclusione.
Sotto diamo due *esempi.*

***SVOLGIMENTO 1.*** $\Gamma \vdash \Delta$ e' conclusione di una derivazione. La derivazione puo' avere la forma: identita', assioma del falso, oppure terminare con una regola.

*Casi Base.* $A \vdash A$ oppure $\Gamma, \bot \vdash \Delta$. In entrambi i casi, c'e' almeno una formula a sinistra ($A$ oppure $\bot$), quindi la parte sinistra del sequente non e' vuota.

*Passo induttivo.* $\Gamma \vdash \Delta$ e' conclusione di una regola che introduce un connettivo & od $\vee$.

Nei casi

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta} \quad e \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

la parte sinistra non e' vuota.

Restano i casi

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\&B} \quad e \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Le premesse ($\Gamma \vdash A$, $\Gamma \vdash B$) sono ancora sequenti derivabili le cui formule usano solo & ed $\vee$, quindi, **per ipotesi induttiva, $\Gamma$ non e' vuoto**.

In queste due regole, premesse e conclusione hanno la stessa parte sinistra.

***SVOLGIMENTO 2.*** $\Gamma \vdash \Delta$ e' conclusione di una derivazione costruita a partire da identita' e assima del falso, usando solo le regole per & ed $\vee$ `[ed eventualmente weakening sulle identita']`.

*Casi Base.* $A \vdash A$ oppure $\Gamma, \bot \vdash \Delta$. In entrambi i casi, c'e' almeno una formula a sinistra ($A$ oppure $\bot$), quindi la parte sinistra del sequente non e' vuota.

*Passo induttivo.* La proprieta' e' preservata dalle regole di & e $\vee$: se le premesse hanno parte sinistra non vuota (questa e' l'ipotesi induttiva), allora la conclusione ha parte sinistra non vuota.

Quindi possiamo generare solo derivazioni la cui conclusione ha parte sinistra non vuota.

**Esercizio EXTRA** (7 punti)

1. Dare una definizione induttiva di lista (scegliere costanti e simboli di funzione). Gli elementi della lista sono presi in un insieme $S$ dato (potrebbero essere interi, stringhe, caratteri... non specifichiamo).
2. Data la precedente definizione di lista, definire la lungezza di una lista.
3. 
   - Definire la concatenazione di due liste (Sugg: induzione sulla prima lista).
   - Dimostrare che date due liste $l1, l2$ abbiamo che $lunghezza(concatena(l1, l2)) = lunghezza(l1) + lunghezza(l2)$. (Sugg: induzione sulla prima lista).
4. Introdurre nel linguaggio
   - un simbolo di funzione Testa, che vogliamo descriva l'operazione che presa una lista, restituisce la testa della lista,
   - ed un simbolo di funzione Coda, che vogliamo corrisponda all'operazione che presa una lista, restituisce la coda della lista.

   Formalizzare nel linguaggio queste due operazioni (cioe' descriverle in formule).

1. Qui scegliamo come simbolo di funzione Add. Potrebbe essere L, Push, etc..

$$nil\ e'\ lista \qquad \frac{l\ e'\ lista \quad x \in S}{Add(x, l)\ e'\ lista} \qquad \texttt{OPPURE} \qquad nil \in Liste \qquad \frac{l \in Liste \quad x \in S}{Add(x, l) \in Liste}$$

2. **a.** `Vogliamo definiere la lunghezza di tutti i casi possibili di lista. In realta, bastano due casi: la lunghezza della lista vuota, e la lunghezza di una lista generata.`

   Dal punto precedente, sappiamo che una lista o e' $nil$, oppure e' della forma $Add(x, l)$

   Lung(nil)=0

   Lung(Add(x,l))= 1+ Lung(l)
3. Come per la lunghezza, definisco la concatenazione delle liste guardando i casi possibili.

   La prima lista o e' $nil$, oppure e' della forma $Add(x, l)$.

   Concatena(nil, l2)= l2

   Concatena(Add(x,l), l2)= Add(x, Concatena(l, l2))

   **b.** Vogliamo mostrare che Lung(Concatena(l1,l2))= Lung(l1)+ Lung(l2)
   Sappiamo che l1=nil oppure l1=Add(x,l)

   - *Caso base* Concatena(nil,l2) = l2, quindi Lung(Concatena(nil,l2))= Lung l2, che infatti e' Lung(nil) + Lung(l2).
   - *Passo induttivo.* Consideriamo il caso in cui la prima lista non e' $nil$.
     Per definizione, Concatena(Add(x,l), l2) = Add(x, Concatena(l, l2)) quindi
     Lung(Concatena(Add(x,l), l2))= Lung(Add(x, Concatena(l, l2)))
     Per definizione Lung(Add(x, Concatena(l, l2)))= 1 + Lung(Concatena(l, l2))
     Per ipotesi induttiva Lung(Concatena(l, l2)= Lung(l) + Lung(l2).
     Siccome Lung(Add(x,l))= 1+Lung(l), i conti tornano.
4. Testa e coda non sono definiti sulla lista vuota.

   Testa(Add(x,l))=x

   Coda(Add(x,l))=l

   Se vogliamo formule: $\forall x \forall l Testa(Add(x, l)) = x \quad \forall x \forall l Coda(Add(x, l)) = l$