Laboratorio 4

Scopo. Familiarizzarsi con due nozioni strettamente legate alla ricorsione: definire per induzione, e dimostrare per induzione.

Esempio importante. Per descrivere cosa e' un *albero binario*, possiamo dare un modo per generare tutti gli alberi. Questa si chiama *"definizione induttiva"*. Per esempio "un albero e' l'albero vuoto, oppure un nodo seguito da due alberi"... Diciamo cosa e' l'albero piu' semplice possibile (albero vuoto), e come costruire un albero a partire da alberi (un nodo seguito da due alberi).

Come faccio a dimostrare che una certa proprieta' e' vera per tutti gli alberi? Posso testarla sul piu' grande numero di esempi di albero che riesco a inventare (vi fidate?)... oppure posso ragionare come segue:

- *Base: l'albero vuoto soddisfa la proprieta'*
- *il costruttore preserva la proprieta*: se costruisco un albero T a partire da due alberi T_1, T_2 che soddisfano la proprieta', allora l'albero T soddisfa la proprieta'.

Poiche' ***tutti*** gli alberi binari sono generati in questo modo, partendo da alberi vuoti, abbiamo mostrato che qualunque albero soddisfa la proprieta'. Questa tecnica si chiama *"dimostrazione per induzione"*.

Ex. 1 Consideriamo alberi binari, dire se sono vere le seguenti affermazioni.

- Se h e' l'altezza dell'albero, allora $\mathit{NumeroFoglie} \leq 2^h$
- Consideriamo un albero tale che nessun nodo ha un solo figlio. Allora $\mathit{NumeroFoglie} = \mathit{NumeroNodiInterni} + 1$

Termini e linguaggio: alberi Molte strutture dati possono essere formalizzate in un linguaggio al primo ordine (quello che abbiamo studiato). Abbiamo considerato il caso degli alberi. Ci chiediamo:

i Quali sono le costanti (i "mattoni di base" da cui partiamo)?

ii Di che costruttori abbiamo bisogno?

Abbiamo visto che abbiamo bisogno dei seguenti:

i Costanti: *nil* (albero vuoto)

ii Costruttori: un simbolo di funzione binaria $Node(-,-)$, che presi due alberi restituisce un albero.

Quindi:

- nil e' un albero

- Se T_1, T_2 sono alberi, allora $Node(T_1, T_2)$ sono alberi.

Formalmente, per descrive come generare un termine del linguaggio (cioe' un albero binario), possiamo

- scrivere delle regole (definizione induttiva dell'insieme degli alberi binari...)

$$nil \in Tree \qquad\qquad \frac{T_1 \in Tree \quad T_2 \in Tree}{Node(T_1, T_2) \in Tree}$$

- oppure dare una grammatica pre produrre i termini

$$T := nil \ \mid \ Node(T, T)$$

Ex. Se vogliamo che i nodi dell'albero contengano informazione, potremmo mettere lo spazio anche per un campo "dati", cioe' un elemento di un certo insieme S (dove S puo' essere l'insieme degli interi, stringhe, etc...)

Quindi potremmo avere un costrutore del tipo $Node'(x, T_1, T_2)$, con $x \in S$. Provare a definire formalemnte questa struttura dati.

Ex. 2

a Data la definizione formale di albero come termine vista sopra, definire (per induzione) l'altezza di un albero.

b Mostrare come associare un disegno (di albero) con nodi ed archi ad un termine $T \in Tree$. Dimostrare che la definizione induttiva di altezza coincide con la definizione standard di "*cammino massimo dalla radice ad una foglia*" (aiutarsi col disegno).

Ex 3. Una formula e' un albero...

1. Come definireste cosa e' una formula? (Sugg. pensare ad una definizione induttiva: come generaimo una formula? Cioe':
   – Da cosa partiamo?
   – Come costruiamo una formula a partire da formule?)
2. Definire (induttivamente) cosa e' l'albero di parsing di una formula (sugg. mostrare come associare ad ogni formula il suo albero "disegnato")
3. Mostrare che il rango di una formula proposizionale coincide con la sua altezza nell'albero di parsing. Il rango di una formula (proposizionale) e' definito per induzione come segue:

atomi:	$rango(p) = 0$
$\neg$:	$rango(\neg A) = rango A + 1,$
$\&, \vee, \rightarrow$:	$rango(A * B) = max\{rango(A), rango(B)\} + 1$

Ex4 1. Immaginiamo un ufficio postale dotato solo di francobolli del varole di 2 centesimi o 3 centesimi. Dimostrare che e' possibile affrancare qualunque lettera

2. Immaginate una fila di attesa al cinema, che inizia con una donna, e termina con un uomo. Dimostrare che nella coda c'e' un uomo immediatamente alle spalle di una donna...

Induzione strutturale sulle derivazioni

Anche una derivazione e' un albero... Ogni derivazione e' costruita a partire da identita' ed assioma del falso, usando le regole (costruttori).

Ex 5 Consideriamo le regole di LJ (ignoriamo le regole della negazione, che sappiamo poter definire usando $\to$ e $\perp$).

Dimostrare che se l'assioma del falso ha esattamente una formula a destra, allora tutti i sequenti derivabili in LJ hanno esattamente una formula a destra.

Come procedere. Dire che un sequente e' derivabile in LJ significa dire che e' conclusione di una derivazione in LJ. Quindi vogliamo dire che:

- *La proprieta' e' vera per identita' ed assiomi;*
- *Le regole preservano la proprieta'*: se la proprieta' e' vera per le premesse di una regola, allora e' vera anche per la conclusione.

In questo modo siamo certi che qualunque sequente che e' conclusione di una derivazione soddisfa la proprieta' che vogliamo, perche' tutte le derivazioni sono ottenute in questo modo (identita', assimo del falso, e regole.). Moralmente, abbiamo verificato che tutte le derivazioni che costruiamo soddisfano la proprieta' che vogliamo.

Ex 6 Dimostrare, senza usare taglio, che data una derivazione in LJ di $\Gamma \vdash \perp$, la possiamo trasformare in una derivazione di $\Gamma \vdash$.