Laboratorio 6

Esercizi di preparazione al compito, suggeriti *dopo* il laboratorio 6.
E' meglio svolgerli prima di martedi 20.

1 Esercizi sull'uso del linguaggio

- Formalizzare la struttura dati pila (per ispirazione, riguardare la definizione di alberi nel Laboratorio 4):

  - di che costanti ho bisogno?

  - di che costruttori ho bisogno? (Sugg.: chiamate il simbolo di funzione *push.* Il costruttore push restituisce una pila, prendendo cosa?)

- Formalizzare le operazioni di pop (con cui estraggo l'elemento in cima alla pila), e top (che restituisce la pila cui ho tolto l'ultimo elemento inserito).

Esercizio 3.3 del Laboratorio 4.

2 Induzione: esercizi.

Cosa devo fare esattamente? Se questa e' la domanda, vai prima alla sezione 3. Per un breve riassunto di cosa vuol dire valutazione, valido, soddisfacibile, etc, vedere sezione 4.

Esercizi raccomandati: 1.,2., e 3.

1. ** Tutte le regole di LK preservano la validita: se i sequenti premesse sono valide, allora il sequente conclusione e' valido (fatto).

   Sapendo che il fatto detto sopra e' vero, dimostrare (per induzione sulla struttura delle derivazioni) che *se un sequente e' derivabile in LK, allora e' valido.*

2. *** Dimostrare (per induzione sulle formule) che: *data una formula costruita usando solo i connettivi* $\&$ *ed* $\vee$, *allora non e' derivabile in LJ.*

3. ** Consideriamo formule costruite a partire da variabili proposizionali e negazione di variabili proposizionale, usando i connettivi $\&$ ed $\vee$. Pere esempio :

   $$A = p \vee \neg p, \quad B = (q\&r) \vee (p \vee \neg p)$$

   (al volo: scrivere l' albero di parsing di A e di B).

   a. Dare una definizione induttiva di questo tipo di formule.
   b. Consideriamo l'operazione che scambia ogni variabile proposizionale p con $\neg p$ (e viceversa), ed ogni connettivo $\&$ con $\vee$.
      Formalmente:

      $$\begin{array}{l} Scambia(p) := \neg p \\ Scambia(\neg p) := p \\ Scambia(A\&B) := Scambia(A) \vee Scambia(B) \\ Scambia(A \vee B) := Scambia(A) \vee Scambia(B) \end{array}$$

   c. Dimostrare che ogni valutazione che rende vera A (in LK), rende falsa $Scambia(A)$.

4. Dimostrare che in LK ogni formula e' equivalente ad una formula che usa solo i connettivi $\neg, \&$

3 Induzione (breve ripasso moooolto informale)

Usiamo il fatto che tutti i nostri oggetti sono generati usando certi costruttori, a partire da oggetti di base.

In generale, devo dimostrare che:

- La proprieta' e' vera nei casi base
- La proprieta' e' preservata dai costruttori
- Eventuali condizioni sul nostro *oggetto* valgono anche per i *sotto-oggetti* da cui e' costruito (vedi esempio sotto, ed esercizio 2. e 3.)*Non dimenticarsene: l'ipotesi induttiva si applica solo in questo caso!!*

3.1 Struttura generale: induzione sulle formule

"Dimostrare che se una formula soddisfa la condizione C
allora soddisfa la proprieta' P"

- Verifico che la proprieta' e' vera per atomi e $\perp$
- Se $F = A * B$ (con $*$ connettivo)
  - Mostro che la condizione C vale per A e/o B.
    Quindi (per ipotesi induttiva) posso dire che P e' vera per A e/o B.
  - Mostro che dal fatto che la proprieta' P e' vera per A e/o B segue che P e' vera per $A * B$

Notare come "assumere che la proprieta' sia vera sulle sottoformule" somiglia molto al processo di costruzione di una funzione ricorsiva: assumiamo che la chiamata ricorsiva lavori correttamente (anche se la funzione la stiamo ancora scrivendo).

Importante: se la proprieta' che vogliamo dimostrare dipende da una condizione C, l'ipotesi induttiva scatta per le sottoformule solo se sappiamo *dimostrare* che C *vale per le sottoformule*.

3.1.1 Esercizio svolto.

Dimostrare che data una formula proposizionale F costruita usando solo atomi ed i connettivi & ed $\vee$, abbiamo la seguente proprieta' P:

$$(P) \quad NumeroAtomi = NumeroConnettivi + 1$$

Caso base. Verifico che la proprieta' P vale per gli atomi.
Passo induttivo. Se $F = A\&B$ allora:

- A e B sono costruite usando solo i connettivi & ed $\vee$ (cioe' soddisfano la condizione). Quindi posso applicare l'ipotesi induttiva.
- dal fatto che la proprieta' P e' vera per A e P e' vera per B, segue che la proprieta' P e' vera per $A\&B$.

Facciamo i conti. Vediamo facilmente che
$atomi(A\&B) = atomi(A) + atomi(B)$ e
$connettivi(A\&B) = connettivi(A) + connettivi(B) + 1$.
Per induzione abbiamo:
$atomi(A) = connettivi(A) + 1$, $atomi(B) = connettivi(B) + 1$
Quindi:
$atomi(A\&B) = (connettivi(A) + connettivi(B) + 1) + 1 = connettivi(A\&B) + 1$

Lo stesso e' vero per $F = A \vee B$.

3.2 Induzione sulla struttura delle derivazioni

Simile al caso formule: tutte le derivazioni sono generate partendo da identita' e assioma del falso, usando le regole (vedere esercizio 5 in Lab4).

Per dimostrare che la conclusione di una derivazione soddisfa una proprieta', dobbiamo:

- mostrare che la proprieta' e' vera per identita' e assioma del falso
- mostrare che la proprita' e' preservata dalle regole
- !! mostrare che eventuali condizioni sulla conclusione sono vere anche per le premesse

A volte e' utile ricordare che se esiste una derivazione, ne esiste anche una che non usa cut (e quindi ignorare la regola di cut).

4 Piccolo vocabolario: valutazione, valido, soddisfacibile...

Qui consideriamo solo **formule proposizionali**, ed LK.

Consideriamo un esempio di formula atomica, come $p = T(r)$: "Rossi e' un terrorista", oppure $q = T(b)$: "Bianchi e' un terrorista" Queste proposizioni sono vere o false a seconda dell' interpretazione. Anche $p\&q$ e' vera o falsa a seconda del fatto che p e q siano o meno vere. Invece $p \to p$ e' sempre vera, mentre $p\&\neg p$ non e' mai vera, *indipendentemente* dall'interpretazione.

Un'**interpretazione** sceglie un valore di verita' per ogni atomo (atomo = variabile proposizionale = formula atomica): $v(p) = 1$ oppure $v(p) = 0$.

Un'interpretazione la chiamiamo anche **valutazione** o assegnazione di valore di verita'.

Quando fissiamo una valutazione v per gli atomi, e' determinata la valutazione (cioe' il valore di verita') di ogni formula. Data una valutazione v degli atomi, il valore di verita' di una formula A lo indichiamo con $v(A)$, ed e' definito per induzione (come uno si immagina).

A valida. A e' vera per qualunque interpretazione degli atomi, cioe' ogni valutazione la rende vera.

A soddisfacibile. C'e' una valutazione che la rende vera.

A non valida. C'e' una valutazione che la rende falsa (La negazione di "ogni valutazione la rende vera" **NON E'** "ogni valutazione la rende falsa"!)

Un **sequente** $\Gamma \vdash \Delta$ e' valido se per ogni valutazione v, $v(\&\Gamma) \leq v(\vee\Delta)$.

Possiamo dirlo anche in questo modo:
per ogni valutazione v, se $v(C) = 1$ per tutte le formule C in Γ, allora esiste almeno una formula D in Δ tale che $v(D) = 1$.