

**ANALISI MATEMATICA 1**  
Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4  
**Appello del 7.02.2012**

**NB:** in fondo allo svolgimento del tema 4 si trovano alcuni brevi commenti agli errori più comuni trovati nella correzione.

**Commenti dopo la prima prova orale:** è molto importante prepararsi all'orale scrivendo tutte le definizioni, gli enunciati e le principali dimostrazioni e controllando quello che si è scritto. Non è assolutamente sufficiente "avere un'idea" delle cose: queste vanno scritte in modo corretto e comprensibile.

## TEMA 1

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x) = \int_{-1}^x \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$

- (a) dimostrare che il dominio è  $\mathbb{R}$ , studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
- (b) calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ; calcolare i limiti di  $f'$  negli eventuali punti di non derivabilità;
- (c) studiarne concavità e convessità della funzione;
- (d) disegnarne un grafico qualitativo.

*Svolgimento.* (a) Poniamo  $g(t) = \arctan 3t/t$ . Questa funzione è estendibile con continuità a  $t = 0$  ponendo  $g(0) = 3$ , per cui  $g$  è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ ; in particolare, è integrabile in  $[-1, x]$  per ogni  $x \geq 1$  e in  $[x, -1]$  per ogni  $x < -1$ . Siccome  $g$  è sempre positiva,  $f(x) > 0$  per ogni  $x > -1$  e  $f(x) < 0$  per ogni  $x < -1$ . Siccome  $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$  per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ ,  $g$  non è integrabile in senso generalizzato né in  $[-1, +\infty[$  né in  $] -\infty, -1]$ , cioè si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan 3x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.

(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che  $g$  è estendibile con continuità a 0 si ottiene

$$f'(x) = \frac{\arctan 3x}{x}, x \neq 0, \quad f'(0) = 3.$$

Il segno di  $f'$  è sempre positivo, per cui  $f$  è strettamente crescente.

(c)

$$f''(x) = \frac{3x - (1 + 9x^2) \arctan 3x}{x^2(1 + 9x^2)}.$$

Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione  $h(x) = 3x - (1 + 9x^2) \arctan 3x$ . Si ha che  $h(0) = 0$  e  $h'(x) = -18x \arctan 3x$ , che è  $< 0$  per ogni  $x$ . Di conseguenza,  $h(x) > 0$  per ogni  $x < 0$  e  $h(x) < 0$  per ogni  $x > 0$ , cioè  $f$  è convessa in  $] -\infty, 0]$  e concava in  $[0, +\infty[$ , per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in Figura 1.

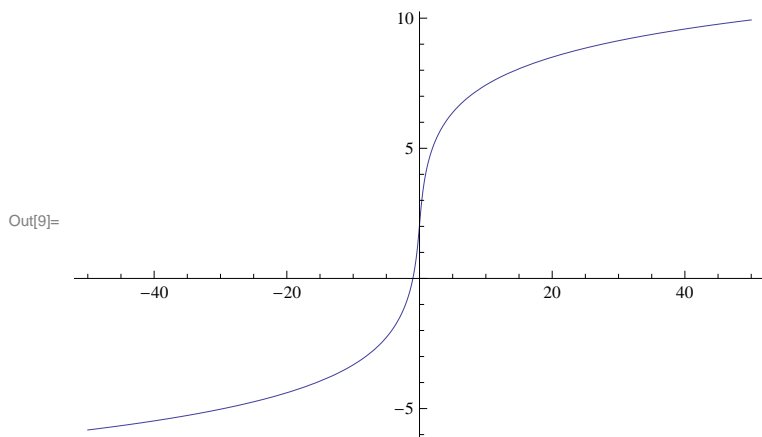


Figura 1: Il grafico di  $f$  (Tema 1).

**Esercizio 2.** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x + \cos \arctan x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1+x^2) - \sin x^2}$$

*Svolgimento.* Si ha:

$$\begin{aligned} \cos \arctan x &= 1 - \frac{(\arctan x)^2}{2} + \frac{(\arctan x)^4}{24} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \frac{x^4}{24} \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{2}{3}x^4 \right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) - \sin x^2 &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che  $e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x = o(x^n)$  per  $x \rightarrow 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il limite diventa perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{1}{2}.$$

**Esercizio 3.** Calcolare l'integrale

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx.$$

*Svolgimento.* Con la sostituzione  $x = t^3$  si ha

$$\begin{aligned} \int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx &= 3 \int_0^2 t^2 e^t dt = 3 \left[ t^2 e^t \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 t e^t dt \right] \\ &= 3 \left[ 4e^2 - 2 \left( t e^t \Big|_0^2 - \int_0^2 e^t dt \right) \right] \\ &= 12e^2 - 12e^2 + 6(e^2 - 1) = 6(e^2 - 1). \end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Risolvere l'equazione

$$i \operatorname{Re} z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

*Svolgimento.* Poniamo  $z = x + iy$ . L'equazione diventa

$$ix + x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 - 1,$$

cioè

$$ix(1 + 2y) = 2y^2 - 1.$$

Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè

$$\begin{aligned} x(1 + 2y) &= 0 \\ 2y^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

che dà

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = 0.$$

Le due soluzioni si trovano entrambe sull'asse immaginario.

**Esercizio 5 [facoltativo].** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile tre volte e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $f''(x_0) = 0$ ,  $f'''(x_0) \neq 0$ . Si dimostri che  $x_0$  è un punto di flesso per  $f$ .

*Svolgimento.* Per definizione di derivata (terza) si ha

$$f''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(ricordando che  $f''(x_0) = 0$  per ipotesi)

$$\begin{aligned} &= f'''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \\ &= (x - x_0)(f'''(x_0) + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Siccome  $f'''(x_0) \neq 0$  per ipotesi, esiste  $\delta > 0$  tale che se  $|x - x_0| < \delta$  allora  $f'''(x_0) + o(1)$  ha lo stesso segno di  $f'''(x_0)$ , cioè se  $|x - x_0| < \delta$  allora il segno di  $f''(x)$  è uguale al segno di  $(x - x_0)f'''(x_0)$ . Questo segno è costante per  $x < x_0$ ,  $|x - x_0| < \delta$  e per  $x > x_0$ ,  $|x - x_0| < \delta$ , ma cambia esattamente in  $x_0$ , che quindi è un punto di flesso.

## TEMA 2

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x) = \int_2^x \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

- (a) dimostrare che il dominio è  $\mathbb{R}$ , studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinare gli eventuali asintoti;  
(b) calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ; calcolare i limiti di  $f'$  negli eventuali punti di non derivabilità;  
(c) studiarne concavità e convessità della funzione;  
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

*Svolgimento.* (a) Poniamo  $g(t) = \arctan 2t/t$ . Questa funzione è estendibile con continuità a  $t = 0$  ponendo  $g(0) = 2$ , per cui  $g$  è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ ; in particolare, è integrabile in  $[2, x]$  per ogni  $x \geq 2$  e in  $[x, 2]$  per ogni  $x < 2$ . Siccome  $g$  è sempre positiva,  $f(x) > 0$  per ogni  $x > 2$  e  $f(x) < 0$  per ogni  $x < 2$ . Siccome  $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$  per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ ,  $g$  non è integrabile in senso generalizzato né in  $[2, +\infty[$  né in  $] -\infty, 2]$ , cioè si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan 2x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.

(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che  $g$  è estendibile con continuità a 0 si ottiene

$$f'(x) = \frac{\arctan 2x}{x}, x \neq 0, \quad f'(0) = 2.$$

Il segno di  $f'$  è sempre positivo, per cui  $f$  è strettamente crescente.

(c)

$$f''(x) = \frac{2x - (1 + 4x^2) \arctan 2x}{x^2(1 + 4x^2)}.$$

Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione  $h(x) = 2x - (1 + 4x^2) \arctan 2x$ . Si ha che  $h(0) = 0$  e  $h'(x) = -8x \arctan 2x$ , che è  $< 0$  per ogni  $x$ . Di conseguenza,  $h(x) > 0$  per ogni  $x < 0$  e  $h(x) < 0$  per ogni  $x > 0$ , cioè  $f$  è convessa in  $] -\infty, 0]$  e concava in  $[0, +\infty[$ , per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in figura 2.

**Esercizio 2.** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x + \cos \sin 2x - e^{-2x^2}}{\ln(1 - x^2) + \arctan x^2}$$

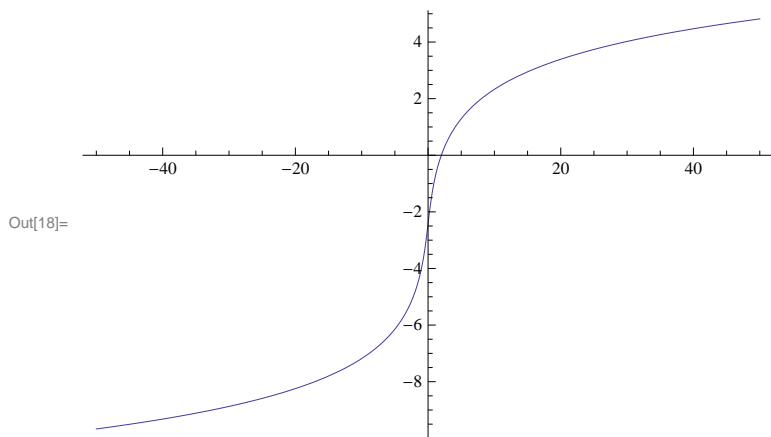


Figura 2: Il grafico di  $f$  (Tema 2).

*Svolgimento.* Si ha:

$$\begin{aligned}
 \cos \sin 2x &= 1 - \frac{(\sin 2x)^2}{2} + \frac{(\sin 2x)^4}{24} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left( 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \frac{2x^4}{3} && \text{per } x \rightarrow 0 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left( 4x^2 - \frac{16}{3}x^4 \right) + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\
 &= 1 - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

e

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
 \ln(1 - x^2) + \arctan x^2 &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + x^2 + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\
 &= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che  $e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x = o(x^n)$  per  $x \rightarrow 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il limite diventa perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{8}{3}.$$

**Esercizio 3.** Calcolare l'integrale

$$\int_0^9 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx.$$

*Svolgimento.* Con la sostituzione  $x = t^2$  si ha

$$\begin{aligned}\int_0^9 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^3 t^2 e^t dt = 3 \left[ t^2 e^t \Big|_0^3 - 2 \int_0^3 t e^t dt \right] \\ &= 2 \left[ 9e^3 - 2 \left( t e^t \Big|_0^3 - \int_0^3 e^t dt \right) \right] \\ &= 18e^3 - 12e^3 + 4(e^3 - 1) = 10e^3 - 4.\end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Risolvere l'equazione

$$i \operatorname{Im} z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

*Svolgimento.* Poniamo  $z = x + iy$ . L'equazione diventa

$$iy + x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2 - 1,$$

cioè

$$iy(1 + 2x) = 2y^2 - 1.$$

Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè

$$\begin{aligned}y(1 + 2x) &= 0 \\ 2y^2 - 1 &= 0,\end{aligned}$$

che dà

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Le due soluzioni si trovano entrambe su una retta parallela all'asse immaginario.

## TEMA 3

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x) = \int_{-2}^x \frac{\arctan 2t}{t} dt,$$

- dimostrare che il dominio è  $\mathbb{R}$ , studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
- calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ; calcolare i limiti di  $f'$  negli eventuali punti di non derivabilità;
- studiarne concavità e convessità della funzione;
- disegnarne un grafico qualitativo.

*Svolgimento.* (a) Poniamo  $g(t) = \arctan 2t/t$ . Questa funzione è estendibile con continuità a  $t = 0$  ponendo  $g(0) = 2$ , per cui  $g$  è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ ; in particolare, è integrabile in  $[-2, x]$  per ogni  $x \geq -2$  e in  $[x, -2]$  per ogni  $x < -2$ . Siccome  $g$  è sempre positiva,  $f(x) > 0$

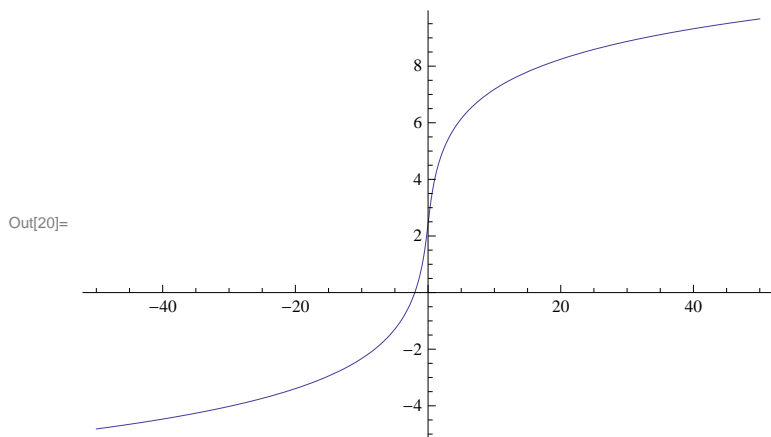


Figura 3: Il grafico di  $f$  (Tema 3).

per ogni  $x > -2$  e  $f(x) < 0$  per ogni  $x < -2$ . Siccome  $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$  per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ ,  $g$  non è integrabile in senso generalizzato né in  $[-2, +\infty[$  né in  $] -\infty, -2]$ , cioè si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan 2x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.

(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che  $g$  è estendibile con continuità a 0 si ottiene

$$f'(x) = \frac{\arctan 2x}{x}, x \neq 0, \quad f'(0) = 2.$$

Il segno di  $f'$  è sempre positivo, per cui  $f$  è strettamente crescente.

(c)

$$f''(x) = \frac{2x - (1 + 4x^2) \arctan 2x}{x^2(1 + 4x^2)}.$$

Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione  $h(x) = 2x - (1 + 4x^2) \arctan 2x$ . Si ha che  $h(0) = 0$  e  $h'(x) = -8x \arctan 2x$ , che è  $< 0$  per ogni  $x$ . Di conseguenza,  $h(x) > 0$  per ogni  $x < 0$  e  $h(x) < 0$  per ogni  $x > 0$ , cioè  $f$  è convessa in  $] -\infty, 0]$  e concava in  $[0, +\infty[$ , per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in figura 3.

**Esercizio 2.** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x^2 - \cos \sinh 2x + e^{-2x^2}}{\ln(1 + x^2) - \tan x^2}$$

*Svolgimento.* Si ha:

$$\begin{aligned}\cos \sinh 2x &= 1 - \frac{(\sinh 2x)^2}{2} + \frac{(\sinh 2x)^4}{24} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( 2x + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \frac{2x^4}{3} && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 \right) + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - 2x^2 - 2x^4 + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0\end{aligned}$$

e

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\ln(1+x^2) - \tan x^2 &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che  $e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \ln x = o(x^n)$  per  $x \rightarrow 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il limite diventa perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -8.$$

**Esercizio 3** Calcolare l'integrale

$$\int_1^{16} \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

*Svolgimento.* Con la sostituzione  $x = t^4$  si ha

$$\begin{aligned}\int_1^{16} \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x}} dx &= 4 \int_1^2 t^2 e^t dt = 4 \left[ t^2 e^t \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 t e^t dt \right] \\ &= 4 \left[ 4e^2 - e - 2 \left( t e^t \Big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt \right) \right] \\ &= 16e^2 - 4e - 8(2e^2 - e) + 8(e^2 - e) = 8e^2 - 4e.\end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Risolvere l'equazione

$$i \operatorname{Re} z - z^2 + 1 = |z|^2$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

*Svolgimento.* Poniamo  $z = x + iy$ . L'equazione diventa

$$ix - x^2 + y^2 - 2ixy + 1 = x^2 + y^2,$$

cioè

$$ix(1 - 2y) = 2x^2 - 1.$$

Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè

$$\begin{aligned}x(1 - 2y) &= 0 \\ 2x^2 - 1 &= 0,\end{aligned}$$

che dà

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Le due soluzioni si trovano entrambe su una retta parallela all'asse reale.

## TEMA 4

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan 3t}{t} dt,$$

- (a) dimostrare che il dominio è  $\mathbb{R}$ , studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinare gli eventuali asintoti;  
 (b) calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ; calcolare i limiti di  $f'$  negli eventuali punti di non derivabilità;  
 (c) studiarne concavità e convessità della funzione;  
 (d) disegnarne un grafico qualitativo.

*Svolgimento.* (a) Poniamo  $g(t) = \arctan 3t/t$ . Questa funzione è estendibile con continuità a  $t = 0$  ponendo  $g(0) = 3$ , per cui  $g$  è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo limitato di  $\mathbb{R}$ ; in particolare, è integrabile in  $[1, x]$  per ogni  $x \geq 1$  e in  $[x, 1]$  per ogni  $x < 1$ . Siccome  $g$  è sempre positiva,  $f(x) > 0$  per ogni  $x > 1$  e  $f(x) < 0$  per ogni  $x < 1$ . Siccome  $g(t) \sim \frac{\pi}{2t}$  per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ ,  $g$  non è integrabile in senso generalizzato né in  $[1, +\infty[$  né in  $] -\infty, 1]$ , cioè si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

L'esistenza di asintoti obliqui è dunque da studiare. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan 3x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.

(b) Dal teorema fondamentale del calcolo e dal fatto che  $g$  è estendibile con continuità a 0 si ottiene

$$f'(x) = \frac{\arctan 3x}{x}, x \neq 0, \quad f'(0) = 3.$$

Il segno di  $f'$  è sempre positivo, per cui  $f$  è strettamente crescente.

(c)

$$f''(x) = \frac{3x - (1 + 9x^2) \arctan 3x}{x^2(1 + 9x^2)}.$$

Per studiarne il segno, occorre considerare la funzione  $h(x) = 3x - (1 + 9x^2) \arctan 3x$ . Si ha che  $h(0) = 0$  e  $h'(x) = -18x \arctan 3x$ , che è  $< 0$  per ogni  $x$ . Di conseguenza,  $h(x) > 0$  per ogni  $x < 0$  e  $h(x) < 0$  per ogni  $x > 0$ , cioè  $f$  è convessa in  $] -\infty, 0]$  e concava in  $[0, +\infty[$ , per cui 0 è un punto di flesso. Il grafico è pertanto come in figura 4.

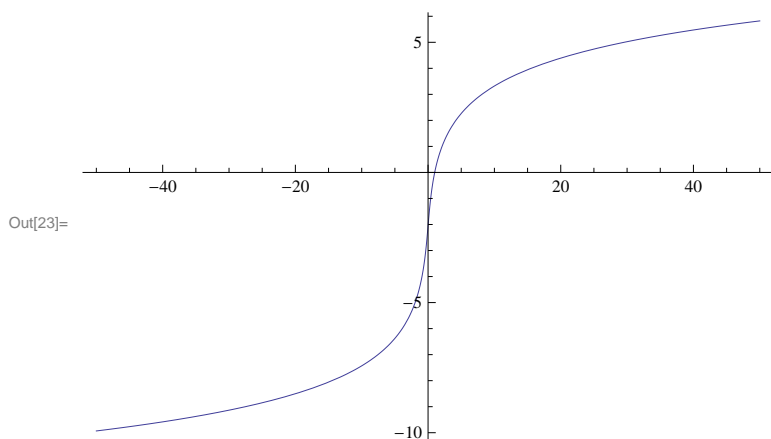


Figura 4: Il grafico di  $f$  (Tema 4).

**Esercizio 2.** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x - \cos \tan x + e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln(1-x^2) + \sinh x^2}$$

*Svolgimento.* Si ha:

$$\begin{aligned} \cos \tan x &= 1 - \frac{(\tan x)^2}{2} + \frac{(\tan x)^4}{24} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \frac{x^4}{24} && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{2}{3}x^4 \right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \ln(1-x^2) + \sinh x^2 &= -x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= -\frac{x^4}{2} + o(x^4) && \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che  $e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \ln x = o(x^n)$  per  $x \rightarrow 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il limite diventa perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = -\frac{5}{6}.$$

**Esercizio 3.** Calcolare l'integrale

$$\int_1^{27} e^{\sqrt[3]{x}} dx.$$

*Svolgimento.* Con la sostituzione  $x = t^3$  si ha

$$\begin{aligned} \int_1^{27} e^{\sqrt[3]{x}} dx &= 3 \int_1^3 t^2 e^t dt = 3 \left[ t^2 e^t \Big|_1^3 - 2 \int_1^3 t e^t dt \right] \\ &= 3 \left[ 9e^3 - e - 2 \left( t e^t \Big|_1^3 - \int_1^3 e^t dt \right) \right] \\ &= 27e^3 - 3e - 6(3e^3 - e) + 6(e^3 - e) = 15e^3 - 3e. \end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Risolvere l'equazione

$$i \operatorname{Im} z - z^2 + 1 = |z|^2$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

*Svolgimento.* Poniamo  $z = x + iy$ . L'equazione diventa

$$iy - x^2 + y^2 - 2ixy + 1 = x^2 + y^2,$$

cioè

$$iy(1 - 2x) = 2x^2 - 1.$$

Siccome il primo membro è puramente immaginario ed il secondo membro è reale, l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, cioè

$$\begin{aligned} y(1 - 2x) &= 0 \\ 2x^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

che dà

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = 0.$$

Le due soluzioni si trovano entrambe sull'asse reale.

### Commenti agli errori più comuni.

Esercizio 1) Molti studenti hanno parzialmente confuso l'integranda con l'integrale: di fatto hanno studiato l'integranda, in particolare per quanto riguarda gli asintoti, mentre per quanto riguarda la derivata hanno ragionato correttamente (per il calcolo). Non mi aspettavo questo tipo di errore. Moltissimi studenti hanno sbagliato il segno della derivata prima, che era sostanzialmente il segno di  $\arctan x/x$ : questo era un errore assolutamente evitabile.

Esercizio 2) Pochissimi studenti hanno calcolato correttamente il limite. La maggior parte ha tralasciato almeno un termine di ordine 4 al numeratore e non ha giustificato correttamente il fatto che si poteva trascurare  $e^{-1/x^2} \ln \sin x$ . In particolare, molti hanno erroneamente scritto che si poteva trascurare perché infinitesimo; altri hanno scritto che si poteva trascurare perché, ad esempio,  $o(\cos \arctan x)$  per  $x \rightarrow 0$ . Ma questo è ovvio, perché  $\cos \arctan x$  non è nemmeno infinitesimo per  $x \rightarrow 0$ . Si doveva invece dire che è  $o(x^4)$  per  $x \rightarrow 0$  (anzi  $o(x^n)$  per ogni  $n$ ). Altri hanno commesso il grossolano errore di sviluppare  $e^{-1/x^2}$  intorno a  $x = 0$  come  $1 - 1/x^2 \dots$ . A lezione si era cercato di mettere in guardia da questo tipo di errori.

Esercizio 4) Ricordo che la parte immaginaria del numero complesso  $x + iy$  è  $y$  e non  $iy$ .