ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4

Appello del 23.02.2012

TEMA 1

COMMENTI.
1) *È MOLTO IMPORTANTE CHE CHI NON HA SUPERATO LO SCRITTO SI METTA A STUDIARE TUTTO DA CAPO E NON COMMETTA L'ERRORE DI SVOLGERE SOLO TEMI D'ESAME.*
2) COLPISCE IL NUMERO DI STUDENTI CHE NON È STATO IN GRADO DI RISOLVERE DISEQUAZIONI CON LA RADICE: QUASI NESSUNO HA STUDIATO CORRETTAMENTE IL SEGNO DI f.
3) SI RICORDA CHE IL CRITERIO ASINTOTICO DELLA RADICE E DEL RAPPORTO DANNO INFORMAZIONI ANCHE SULLA CONVERGENZA SEMPLICE: SE IL LIMITE È > 1, ALLORA LA SERIE NON CONVERGE NEANCHE SEMPLICEMENTE PERCHÉ IL TERMINE GENERALE NON È INFINITESIMO. SE CI SI LIMITA A DIRE CHE LA SERIE DIVERGE ASSOLUTAMENTE, NON SI RISPONDE ALLA DOMANDA SULLA CONVERGENZA SEMPLICE.

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-4|} - |x| + 1$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x^2-4} - x + 1 & \text{per } \ x \geq 2, \\ 2\sqrt{4-x^2} - x + 1 & \text{per } \ 0 < x < 2. \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$, per $x \geq 2$, se e solo se $2\sqrt{x^2-4} \geq x - 1$. Siccome $x - 1 \geq 0$ se $x \geq 2$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $3x^2 + 2x - 17 \geq 0$, che per $x \geq 2$ è soddisfatta dagli $x \geq \frac{-1+2\sqrt{13}}{3}$. Per $0 \leq x < 2$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2\sqrt{4-x^2} \geq x - 1$, che è certamente soddisfatta se $x \leq 1$, mentre per $x > 1$ è equivalente alla disequazione $5x^2 - 2x - 15 \leq 0$, soddisfatta per $1 < x \leq \frac{1+2\sqrt{19}}{5} (< 2)$. In sintesi, $f(x) < 0$ se e solo se $\frac{1+2\sqrt{19}}{5} < x < \frac{-1+2\sqrt{13}}{3}$.
Siccome, per $x > 2$, $f(x) = x\big(2\sqrt{1-4/x^2} - 1\big) + 1$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{x^2-4} - 2x + 1\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4(x^2-4) - (2x-1)^2}{2\sqrt{x^2-4} + 2x - 1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x - 17}{2x\left(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + 1 - \frac{1}{2x}\right)} = 1. \end{aligned}$$

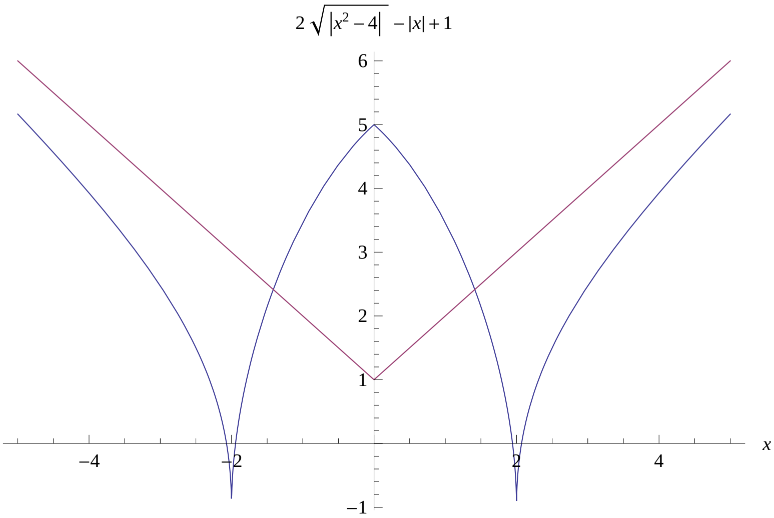

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Dunque la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = -x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 & \text{per } \; x > 2, \\ -\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 & \text{per } \; 0 < x < 2. \end{cases}$$

Per $0 < x < 2$ visibilmente $f'(x) < 0$, mentre, per $x > 2$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2x \geq \sqrt{x^2 - 4}$, cioè sempre. Il minimo assoluto si trova in 2 (e quindi anche in -2), mentre 0 è un punto di massimo relativo. Si ha $\lim_{x \to 0+} f'(x) = -1$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x \to 2-} f'(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x \to 2+} f'(x) = +\infty$, per cui 2 è un punto di cuspide.

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-4} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-8}{(x^2-4)^{3/2}} & \text{per } \; x > 2 \\ \frac{-2\sqrt{4-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{-8}{(4-x^2)^{3/2}} & \text{per } \; 0 < x < 2, \end{cases}$$

e quindi f è concava nei due intervalli $0 < x < 2$ e $x > 2$. Il grafico di f è perciò come in Figura 1.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left|\alpha - 1\right|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 1}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq 1$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha - 1|^{n+1}(n+1)!}{(n+2)! - (n+1)! + 1} \frac{(n+1)! - n! + 1}{|\alpha - 1|^n n!} &= |\alpha - 1| \frac{(n+1)(1+o(1))}{(n+2)(1+o(1))} \\ &\to |\alpha - 1| \qquad \text{per } \; n \to \infty. \end{aligned}$$

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha-1|<1$, cioè per $0<\alpha<2$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha-1|>1$, cioè per $\alpha<0$ o per $\alpha>2$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha=0$ e $\alpha=2$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(n+1)!-n!+1}.$$

Siccome $\frac{n!}{(n+1)!-n!+1}\sim\frac{1}{n+1}$ per $n\to\infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!+1}\leq\frac{n!}{(n+1)!-n!+1}\qquad\text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x)=\frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}\sim\frac{2}{e^x}\qquad\text{per } x\to+\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x\to+\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty[$.
La sostituzione $e^x=t$ dà

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx &= \int_1^{+\infty}\frac{2t+1}{t\big(t^2+2t+2\big)}\,dt\\
&=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2t}+\frac{-t+2}{2(t^2+2t+2)}\right)dt\\
&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{2t}-\frac{1}{4}\frac{2t+2}{t^2+2t+2}+\frac{3}{2}\frac{1}{t^2+2t+2}\right)dt\\
&=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln b}{2}-\frac{\ln\big(b^2+2b+2\big)-\ln 5}{4}+\frac{3}{2}\int_1^b\frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt\right)\\
&=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln b}{2}-\frac{\ln\big(b^2+2b+2\big)-\ln 5}{4}+\frac{3}{2}\big(\arctan(b+1)-\arctan 2\big)\right)\\
&=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[4]{5}\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b^2+2b+2}}+\frac{3}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan 2\Big)\\
&=\frac{\ln 5}{4}+\frac{3}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan 2\Big).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2+iz+2\big)\big(z^3-8i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di z^2+iz+2 sono $z=\frac{-i+\sqrt{-9}}{2}$, cioè $i,-2i$. Gli zeri di z^3-8i sono le radici cubiche di $8i$, cioè $z=2e^{i\pi/6},2e^{i5\pi/6},2e^{i2\pi/3}=\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}+i,-2i$.

Esercizio 5 [facoltativo] Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{(n!)^{\alpha n}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{N}$.

Svolgimento. Usiamo il criterio della radice. Si tratta perciò di calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^\alpha}.$$

Per $\alpha = 1$ è ben noto che tale limite è $+\infty$. Per $\alpha = 2$, osserviamo che si ha

$$\frac{n^n}{n!\,n!} \leq \left(\frac{n}{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\right)^n \frac{1}{3^{n-2}}\frac{1}{4} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0,$$

dove $[\frac{n}{2}]$ indica la parte intera di $\frac{n}{2}$, e quindi la serie converge. Per $\alpha > 2$ la serie converge per confronto con il caso $\alpha = 2$.

TEMA 2

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{|x^2-9|} - |x| + 2$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x^2-9} - x + 2 & \text{per } \ x \geq 3, \\ 2\sqrt{9-x^2} - x + 2 & \text{per } \ 0 < x < 3. \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$, per $x \geq 3$, se e solo se $2\sqrt{x^2-9} \geq x-2$. Siccome $x-2 \geq 0$ se $x \geq 3$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $3x^2+4x-40 \geq 0$, che per $x \geq 3$ è soddisfatta dagli $x \geq \frac{-2+2\sqrt{31}}{3}$. Per $0 \leq x < 3$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2\sqrt{9-x^2} \geq x-2$, che è certamente soddisfatta se $x \leq 2$, mentre per $x > 2$ è equivalente alla disequazione $5x^2-4x-32 \leq 0$, soddisfatta per $1 < x \leq \frac{2+2\sqrt{41}}{5} (< 3)$. In sintesi, $f(x) < 0$ se e solo se $\frac{2+2\sqrt{41}}{5} < x < \frac{-2+2\sqrt{31}}{3}$.
Siccome, per $x > 3$, $f(x) = x\big(2\sqrt{1-9/x^2}-1\big)+2$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \Big(2\sqrt{x^2-9} - 2x + 2\Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4(x^2-9)-(2x-2)^2}{2\sqrt{x^2-9}+2x-2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{8x-40}{2x\Big(\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\Big)} = 2.\end{aligned}$$

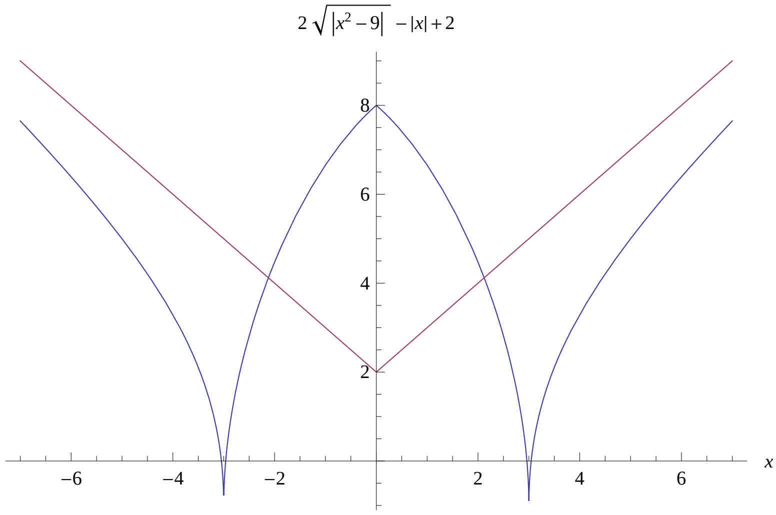

Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

Dunque la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = -x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}} - 1 & \text{per } x > 3, \\ -\frac{2x}{\sqrt{9-x^2}} - 1 & \text{per } 0 < x < 3. \end{cases}$$

Per $0 < x < 3$ visibilmente $f'(x) < 0$, mentre, per $x > 3$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $2x \geq \sqrt{x^2 - 9}$, cioè sempre. Il minimo assoluto si trova in 3 (e quindi anche in -3), mentre 0 è un punto di massimo relativo. Si ha $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -1$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x\to 3-} f'(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to 3+} f'(x) = +\infty$, per cui 3 è un punto di cuspide.

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-9} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9} = \frac{-18}{(x^2-9)^{3/2}} & \text{per } x > 3 \\ \frac{-2\sqrt{9-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{-18}{(9-x^2)^{3/2}} & \text{per } 0 < x < 3, \end{cases}$$

e quindi f è concava nei due intervalli $0 < x < 3$ e $x > 3$. Il grafico di f è perciò come in Figura 2.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big|\alpha + 1\big|^n \frac{(n-1)!}{n! - (n-1)! + 2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq -1$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\frac{|\alpha+1|^{n+1} n!}{(n+1)! - n! + 2} \frac{n! - (n-1)! + 2}{|\alpha+1|^n (n-1)!} = |\alpha+1| \frac{n(1+o(1))}{(n+1)(1+o(1))}$$
$$\to |\alpha + 1| \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha+1|<1$, cioè per $-2<\alpha<0$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha+1|>1$, cioè per $\alpha<-2$ o per $\alpha>0$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha=0$ e $\alpha=-2$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+1}.$$

Siccome $\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+1}\sim\frac{1}{n}$ per $n\to\infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{n!}{(n+1)!-n!+2}\le\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+2}\qquad\text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^{2x}-2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{e^x-1}{e^{2x}-2e^x+2}\sim\frac{1}{e^x}\qquad\text{per } x\to+\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x\to+\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty[$.
La sostituzione $e^x=t$ dà

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^x-1}{e^{2x}-2e^x+2}\,dx &= \int_1^{+\infty}\frac{t-1}{t\big(t^2-2t+2\big)}\,dt\\
&= \int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{2t}+\frac{t}{2(t^2-2t+2)}\right)dt\\
&= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(-\frac{1}{2t}+\frac{2t-2}{4(t^2-2t+2)}+\frac{1}{2(t^2-2t+2)}\right)dt\\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln b}{2}+\frac{\ln\big(b^2-2b+2\big)}{4}+\frac{1}{2}\int_1^b\frac{1}{(t-1)^2+1}\,dt\right)\\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln b}{2}+\frac{\ln\big(b^2-2b+2\big)}{4}+\frac{1}{2}\arctan(b-1)\right)\\
&= \lim_{b\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[4]{b^2-2b+2}}{\sqrt{b}}+\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2-3iz-2\big)\big(z^3+8i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di $z^2-3iz-2$ sono $z=\frac{3i+\sqrt{-1}}{2}$, cioè $i,2i$. Gli zeri di z^3+8i sono le radici cubiche di $-8i$, cioè $z=2e^{i\pi/2},2e^{i7\pi/6},2e^{11\pi/6}=2i,-\sqrt{3}-i,\sqrt{3}-i$.

Per il facoltativo si veda il Tema 1.

TEMA 3

Esercizio 1 Data la funzione
$$f(x) = 3|x| - 4\sqrt{|x^2-1|} - 2$$
(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Si ha
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4\sqrt{x^2-1} - 2 & \text{per } x \geq 1, \\ 3x - 4\sqrt{1-x^2} - 2 & \text{per } 0 < x < 1. \end{cases}$$
$f(x) \geq 0$, per $x \geq 1$, se e solo se $3x - 2 \geq 4\sqrt{x^2-1}$. Siccome il primo membro è positivo per $x > 1$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $7x^2+12x-20 \geq 0$, che è soddisfatta dagli $x \in [1, \frac{-6+4\sqrt{11}}{7}]$. Per $0 \leq x < 1$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $4\sqrt{1-x^2} \leq 3x-2$, che certamente non è soddisfatta se $0 < x < 2/3$, mentre per $x \geq 2/3$ è equivalente alla disequazione $25x^2 - 12x - 12 \geq 0$, soddisfatta per $1 > x \geq \frac{6+4\sqrt{21}}{25}$. In sintesi, $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{6+4\sqrt{21}}{25} < x < \frac{-6+4\sqrt{11}}{7}$.
Siccome, per $x > 1$, $f(x) = x\big(3 - 4\sqrt{1-1/x^2} - 2/x\big)$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) + x &= \lim_{x\to+\infty} \Big(4x - 4\sqrt{x^2-1} - 2\Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(4x-2)^2 - 4(x^2-1)}{4x - 2 + 4\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-16x+20}{4x\Big(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}\Big)} = -2.\end{aligned}$$
Dunque la retta $y = -x - 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = x - 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha
$$f'(x) = \begin{cases} 3 - \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{per } x > 1, \\ 3 + \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{per } 0 < x < 1. \end{cases}$$
Per $0 < x < 1$ visibilmente $f'(x) > 0$, mentre, per $x > 1$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $4x \leq \sqrt{x^2-1}$, cioè mai. Il massimo assoluto si trova in 1 (e quindi anche in -1), mentre 0 è un punto di minimo relativo. Si ha $\lim_{x\to0+} f'(x) = 3$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x\to1-} f'(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to1+} f'(x) = -\infty$, per cui 1 è un punto di cuspide.

(c) Si ha
$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4\sqrt{x^2-1} - \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{4}{(x^2-1)^{3/2}} & \text{per } x > 1 \\ \frac{4\sqrt{1-x^2} + \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{4}{(1-x^2)^{3/2}} & \text{per } 0 < x < 1, \end{cases}$$
e quindi f è convessa nei due intervalli $0 < x < 1$ e $x > 1$. Il grafico di f è perciò come in Figura 3.

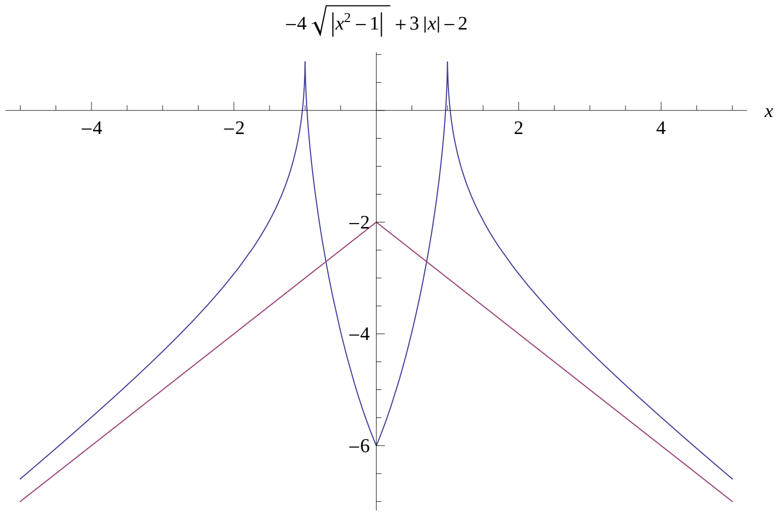

Figura 3: Il grafico di f (Tema 3).

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left|\alpha-2\right|^n\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+4}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq 2$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\frac{|\alpha-2|^{n+1}n!}{(n+1)!-n!+4}\,\frac{n!-(n-1)!+4}{|\alpha-2|^n(n-1)!} = |\alpha+1|\frac{n(1+o(1))}{(n+1)(1+o(1))}$$
$$\to |\alpha-2| \qquad \text{per } \; n\to\infty.$$

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha-2|<1$, cioè per $1<\alpha<3$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha-2|>1$, cioè per $\alpha<1$ o per $\alpha>3$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha=1$ e $\alpha=3$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+4}.$$

Siccome $\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+4}\sim\frac{1}{n}$ per $n\to\infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{n!}{(n+1)!-n!+4}\leq\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!+4} \qquad \text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x)=\frac{2e^x-1}{e^{2x}+2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2} \sim \frac{2}{e^x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$.
La sostituzione $e^x = t$ dà

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2e^x-1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx &= \int_1^{+\infty} \frac{2t-1}{t\big(t^2+2t+2\big)}\,dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{-1}{2t} + \frac{t+6}{2(t^2+2t+2)}\right) dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left(\frac{-1}{2t} + \frac{1}{4}\frac{2t+2}{t^2+2t+2} + \frac{5}{2}\frac{1}{t^2+2t+2}\right) dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\ln b}{2} + \frac{\ln\big(b^2+2b+2\big)-\ln 5}{4} + \frac{5}{2}\int_1^b \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\ln b}{2} + \frac{\ln\big(b^2+2b+2\big)-\ln 5}{4} + \frac{5}{2}\big(\arctan(b+1)-\arctan 2\big)\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{\sqrt[4]{b^2+2b+2}}{\sqrt[4]{5}\sqrt{b}} + \frac{5}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan 2\Big) \\
&= -\frac{\ln 5}{4} + \frac{5}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan 2\Big).
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2+3iz-2\big)\big(z^3-27i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di $z^2+3iz-2$ sono $z = \frac{-3i+\sqrt{-1}}{2}$, cioè $-i, -2i$. Gli zeri di z^3-27i sono le radici cubiche di $27i$, cioè $z = 3e^{i\pi/6}, 3e^{i5\pi/6}, 3e^{2\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i, -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i, -3i$.

Per il facoltativo si veda il Tema 1.

TEMA 4

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = 2|x| - 3\sqrt{|x^2-2|} - 1$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, studiarne il segno, calcolarne i limiti agli estremi del dominio, determinarne gli eventuali asintoti;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f; calcolare i limiti di f' negli eventuali punti di non derivabilità;
(c) calcolare f'' e studiarne la convessità e la concavità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) La funzione è visibilmente definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3\sqrt{x^2-2} - 1 & \text{per } x \geq \sqrt{2}, \\ 2x - 3\sqrt{2-x^2} - 1 & \text{per } 0 < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$, per $x \geq \sqrt{2}$, se e solo se $2x - 1 \geq 3\sqrt{x^2 - 2}$. Siccome il primo membro è positivo per $x > \sqrt{2}$, si possono elevare al quadrato entrambi i membri, ottenendo la disequazione equivalente $5x^2 + 4x - 19 \leq 0$, che è soddisfatta dagli $x \in [\sqrt{2}, \frac{-2+3\sqrt{11}}{5}]$. Per $0 \leq x < \sqrt{2}$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $3\sqrt{2 - x^2} \leq 2x - 1$, che certamente non è soddisfatta se $0 < x < 1/2$, mentre per $x \geq 1/2$ è equivalente alla disequazione $13x^2 - 4x - 17 \geq 0$, soddisfatta per $\sqrt{2} > x \geq \frac{17}{13}$. In sintesi, $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{17}{13} < x < \frac{-2+3\sqrt{11}}{5}$. Siccome, per $x > \sqrt{2}$, $f(x) = x\big(2 - 3\sqrt{1 - 2/x^2} - 1/x\big)$, visibilmente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$. Per trovare l'eventuale asintoto obliquo dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) + x &= \lim_{x\to+\infty} \Big(3x - 3\sqrt{x^2 - 2} - 1\Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x-1)^2 - 9(x^2 - 2)}{3x - 1 + 3\sqrt{x^2 - 2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x + 19}{3x\Big(\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + 1 - \frac{1}{3x}\Big)} = -1.\end{aligned}$$

Dunque la retta $y = -x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, e quindi $y = x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}} & \text{per } \ x > \sqrt{2}, \\ 2 + \frac{3x}{\sqrt{2-x^2}} & \text{per } \ 0 < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Per $0 < x < \sqrt{2}$ visibilmente $f'(x) > 0$, mentre, per $x > \sqrt{2}$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $3x \leq 2\sqrt{x^2 - 2}$, cioè mai. Il massimo assoluto si trova in $\sqrt{2}$ (e quindi anche in $-\sqrt{2}$), mentre 0 è un punto di minimo relativo. Si ha $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 2$, per cui 0 è un punto angoloso. Inoltre $\lim_{x\to\sqrt{2}-} f'(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to\sqrt{2}+} f'(x) = -\infty$, per cui $\sqrt{2}$ è un punto di cuspide.

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{3\sqrt{x^2-2} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^2-2}}}{x^2-2} = \frac{6}{(x^2-2)^{3/2}} & \text{per } \ x > \sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2-x^2} + \frac{3x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{1-x^2} = \frac{6}{(2-x^2)^{3/2}} & \text{per } \ 0 < x < \sqrt{2}, \end{cases}$$

e quindi f è convessa nei due intervalli $0 < x < \sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$. Il grafico di f è perciò come in Figura 4.

Esercizio 2 Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |\alpha + 2|^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Per la convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha (per $\alpha \neq -2$, caso banale in cui la serie ha il termine generale identicamente nullo):

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha + 2|^{n+1}(n+1)!}{(n+2)! - (n+1)! + 3} \frac{(n+1)! - n! + 3}{|\alpha + 2|^n n!} &= |\alpha + 2| \frac{(n+1)(1 + o(1))}{(n+2)(1 + o(1))} \\ &\to |\alpha + 2| \qquad \text{per } \ n \to \infty.\end{aligned}$$

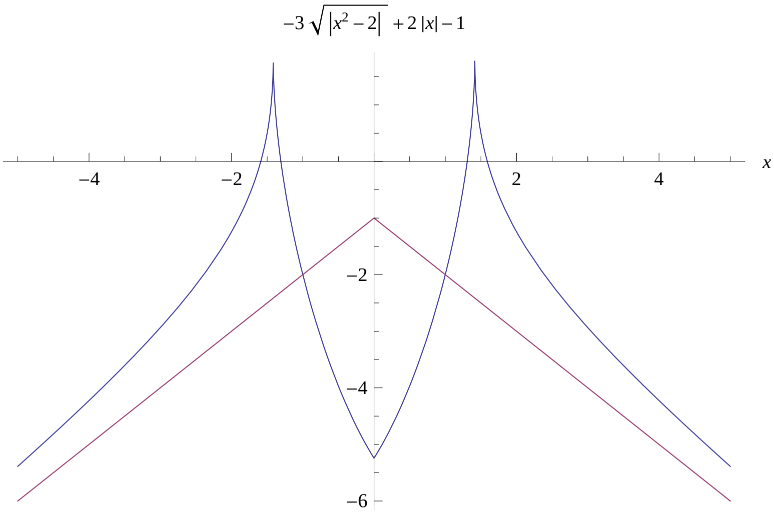

Figura 4: Il grafico di f (Tema 4).

Dunque la serie converge assolutamente per $|\alpha + 2| < 1$, cioè per $-3 < \alpha < -1$, mentre non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $|\alpha + 2| > 1$, cioè per $\alpha < -3$ o per $\alpha > -1$. Restano quindi da studiare i due casi $\alpha = -3$ e $\alpha = -1$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(n+1)! - n! + 3}.$$

Siccome $\frac{n!}{(n+1)!-n!+3} \sim \frac{1}{n+1}$ per $n \to \infty$, la serie non converge assolutamente. Siccome inoltre una verifica immediata dà

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)! - (n+1)! + 3} \leq \frac{n!}{(n+1)! - n! + 3} \qquad \text{per ogni } n \text{ sufficientemente grande,}$$

la serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente e lo si calcoli.

Svolgimento. Il denominatore non ha zeri reali, per cui l'integranda è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$. Per verificare l'integrabilità in senso generalizzato basta osservare che

$$\frac{e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x + 2} \sim \frac{1}{e^x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Siccome l'integranda ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$, risulta integrabile per confronto con $1/e^x$, che è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$.

La sostituzione $e^x = t$ dà

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}-2e^x+2}\,dx &= \int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t\big(t^2-2t+2\big)}\,dt \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} + \frac{-t+4}{2(t^2-2t+2)}\right) dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{2t} - \frac{2t-2}{4(t^2-2t+2)} + \frac{3}{2(t^2-2t+2)}\right) dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln b}{2} - \frac{\ln\big(b^2-2b+2\big)}{4} + \frac{3}{2}\int_1^b \frac{1}{(t-1)^2+1}\,dt\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{\ln b}{2} - \frac{\ln\big(b^2-2b+2\big)}{4} + \frac{3}{2}\arctan(b-1)\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b^2-2b+2}} + \frac{3\pi}{4} \\
&= \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 - iz + 2\big)\big(z^3 + 27i\big).$$

Svolgimento. Gli zeri di $z^2 - iz + 2$ sono $z = \frac{i+\sqrt{-9}}{2}$, cioè $-i, 2i$. Gli zeri di $z^3 + 27i$ sono le radici cubiche di $-27i$, cioè $z = 3e^{i\pi/2}, 3e^{i7\pi/6}, 3e^{11\pi/6} = 3i, -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

Per il facoltativo si veda il Tema 1.