

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4**

**Appello del 17.07.2012**

**TEMA 1**

**Esercizio 1 [9 punti]** Data la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x-2}{x+3} \right| e^{|x-2|}$$

- (a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;  
 (b) calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ; calcolare i limiti di  $f'$  negli eventuali punti di non derivabilità;  
 (c) calcolare  $f''$  e dimostrare che esiste  $M > 0$  tale che  $f''(x) > 0$  se  $|x| > M$ ;  
 (d) disegnarne un grafico qualitativo.

*Svolgimento.* (a) Il dominio è  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$ . Non ci sono simmetrie evidenti. La funzione è sempre  $\geq 0$  e si annulla solo per  $x = 2$  (che pertanto è il punto di minimo assoluto). Si ha visibilmente  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$ . Siccome

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{|x-2|}}{x} = \pm\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.

(b) Si può riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3} e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ \frac{2-x}{x+3} e^{2-x} & \text{per } -3 < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{x+3} e^{x-2} & \text{per } 2 < x, \end{cases}$$

per cui risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \left( \frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} - \frac{x-2}{x+3} \right) e^{2-x} = \frac{-x^2-x+11}{(x+3)^2} e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ \left( \frac{-x-3-(2-x)}{(x+3)^2} - \frac{2-x}{x+3} \right) e^{2-x} = \frac{x^2+x-11}{(x+3)^2} e^{2-x} & \text{per } -3 < x < 2 \\ \left( \frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} + \frac{x-2}{x+3} \right) e^{x-2} = \frac{x^2+x+1}{(x+3)^2} e^{x-2} & \text{per } 2 < x. \end{cases}$$

Il polinomio  $x^2 + x - 11$  si annulla in  $\frac{-1-\sqrt{45}}{2} < -3 < 2 < \frac{-1+\sqrt{45}}{2}$ , per cui solo il primo zero è da considerarsi. Il polinomio  $x^2 + x + 1$  si annulla in  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  ed entrambi i valori sono  $< 2$ . La funzione è pertanto decrescente per  $x < \frac{-1-\sqrt{45}}{2}$ , ha un punto di minimo relativo in  $\frac{-1-\sqrt{45}}{2}$  ed è crescente per  $\frac{-1-\sqrt{45}}{2} < x < -3$ . È inoltre decrescente per  $-3 < x < 2$ , mentre è crescente per  $x > 2$ . Il punto  $x = 2$  è un punto angoloso, perché  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\frac{1}{5} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \frac{1}{5}$ .

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-58-13x+4x^2+x^3}{(x+3)^3} e^{2-x} & \text{per } x < -3 \\ -\frac{58-13x+4x^2+x^3}{(x+3)^3} e^{2-x} & \text{per } -3 < x < 2 \\ \frac{2+7x+4x^2+x^3}{(x+3)^3} e^{x-2} & \text{per } 2 < x. \end{cases}$$

Siccome si ha evidentemente  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f''(x) = +\infty$ , per definizione di limite esiste  $M > 0$  tale che  $f''(x) > 0$  se  $|x| > M$ .

Il grafico risulta essere

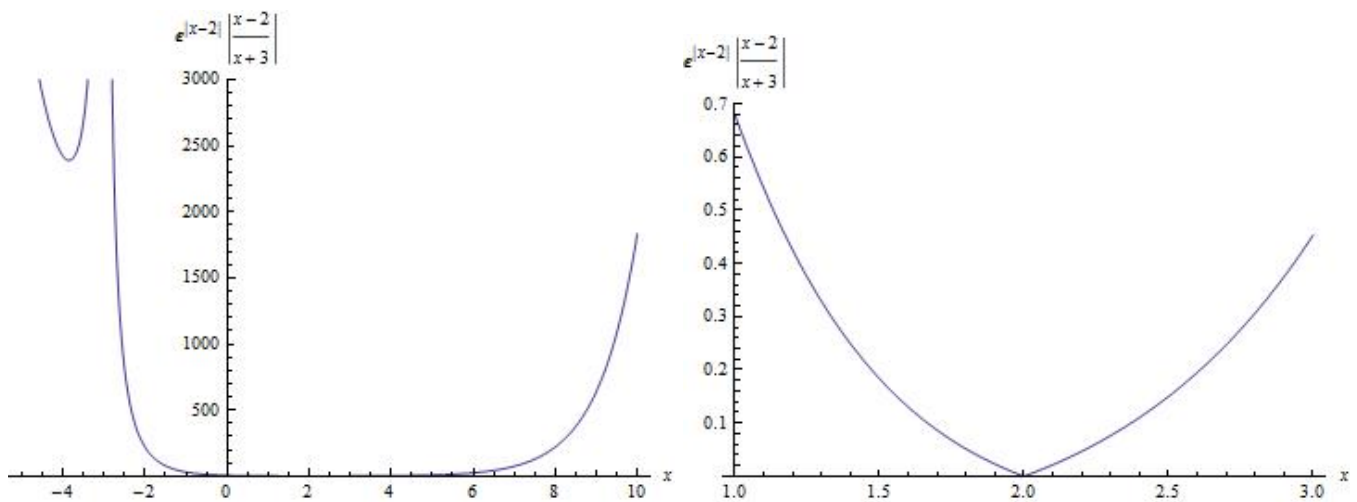


Figura 1: Il grafico di  $f(x) = \left| \frac{x-2}{x+3} \right| e^{|x-2|}$  (Tema 1); la figura sulla destra è un ingrandimento intorno al punto angoloso.

**Esercizio 2 [8 punti]** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) - \sin \frac{1}{2x^2} - e^{-x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan \frac{1}{x^2}}.$$

*Svolgimento.* Dati gli sviluppi

$$\arctan y = y + o(y^2) \text{ per } y \rightarrow 0, \cos \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right), \sin \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

e tenuto conto del fatto ben noto che  $e^{-x} = \frac{1}{x^\alpha}$  per  $x \rightarrow +\infty$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il numeratore risulta:

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Il denominatore risulta

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Il limite pertanto risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{-\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1}{12}.$$

**Esercizio 3 [10 punti]** (a) Calcolare l'ordine di infinito per  $x \rightarrow 3$  della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9 - x^2};$$

b) dire per quali  $\alpha \geq 0$  converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{(9 - x^2)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

*Svolgimento.* (a)  $g(x) = \frac{x}{(3+x)(3-x)}$ , perciò è infinita di ordine 1 per  $x \rightarrow 3$ .

(b) Siccome l'integranda è infinita di ordine  $\alpha$  (se  $\alpha > 0$ ) per  $x \rightarrow 3^-$ , l'integrale risulta convergente se e solo se  $\alpha < 1$ . (c) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx &= (x=3t) \quad 3 \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -3(1-t^2)^{1/2} \Big|_{t=0}^{t=1} = 3. \end{aligned}$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Risolvere l'equazione

$$|z + 2i| = \left| |z| - 2 \right|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

*Svolgimento.* Posto  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , l'equazione diventa

$$|x + i(2+y)| = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right|,$$

cioè

$$x^2 + (2+y)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Semplificando, l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -y,$$

che ha per soluzioni  $x = 0$  e  $y \leq 0$ .

Seguono soluzioni nel piano di Gauss.

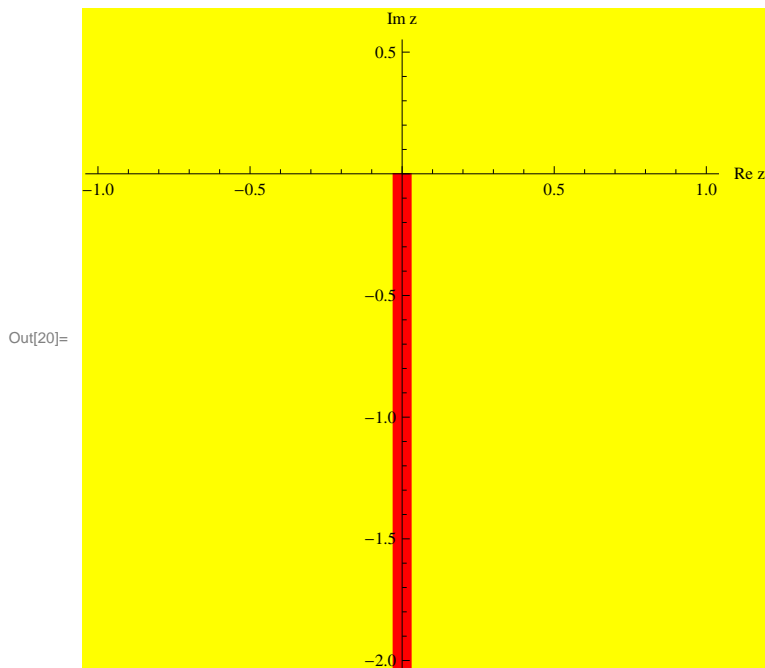


Figura 2: Soluzioni di  $|z + 2i| = \left| |z| - 2 \right|$  (Tema 1).

## TEMA 2

**Esercizio 1 [9 punti]** Data la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x+2}{x-3} \right| e^{|x+2|}$$

- (a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti;  
 (b) calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ; calcolare i limiti di  $f'$  negli eventuali punti di non derivabilità;  
 (c) calcolare  $f''$  e dimostrare che esiste  $M > 0$  tale che  $f''(x) > 0$  se  $|x| > M$ ;  
 (d) disegnarne un grafico qualitativo.

*Svolgimento.* (a) Il dominio è  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$ . Non ci sono simmetrie evidenti. La funzione è sempre  $\geq 0$  e si annulla solo per  $x = -2$  (che pertanto è il punto di minimo assoluto). Si ha visibilmente  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ . Siccome

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{|x+2|}}{x} = \pm\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.

(b) Si può riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-3} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ \frac{x+2}{3-x} e^{x+2} & \text{per } -2 < x \leq 3 \\ \frac{x+2}{x-3} e^{x+2} & \text{per } 3 < x, \end{cases}$$

per cui risulta

$$f'(x) = \begin{cases} \left( \frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} - \frac{x+2}{x-3} \right) e^{-x-2} = \frac{-x^2+x+1}{(x-3)^2} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ \left( \frac{3-x+x+2}{(x-3)^2} + \frac{x+2}{3-x} \right) e^{x+2} = \frac{-x^2+x+11}{(x-3)^2} e^{x+2} & \text{per } -2 < x < 3 \\ \left( \frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} + \frac{x+2}{x-3} \right) e^{x+2} = \frac{x^2-x-11}{(x-3)^2} e^{x+2} & \text{per } 3 < x. \end{cases}$$

Il polinomio  $x^2 - x - 11$  si annulla in  $-2 < \frac{1-\sqrt{45}}{2} < 3 < \frac{1+\sqrt{45}}{2}$ , per cui solo il secondo zero è da considerarsi. Il polinomio  $-x^2 + x + 1$  si annulla in  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  ed entrambi i valori sono  $> -2$ . La funzione è pertanto decrescente per  $x < -2$ , ha un punto di minimo relativo in  $\frac{1-\sqrt{45}}{2}$  ed è crescente per  $\frac{1-\sqrt{45}}{2} < x < 3$ . È inoltre decrescente per  $3 < x < \frac{1+\sqrt{45}}{2}$ , mentre è crescente per  $x > \frac{1+\sqrt{45}}{2}$ . Il punto  $x = -2$  è un punto angoloso, perché  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\frac{1}{5} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \frac{1}{5}$ .

(c) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2+7x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{-x-2} & \text{per } x < -2 \\ -\frac{58-13x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{x+2} & \text{per } -2 < x < 3 \\ \frac{58-13x-4x^2+x^3}{(x-3)^3} e^{x+2} & \text{per } 3 < x. \end{cases}$$

Siccome si ha evidentemente  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f''(x) = +\infty$ , per definizione di limite esiste  $M > 0$  tale che  $f''(x) > 0$  se  $|x| > M$ .

Il grafico risulta essere

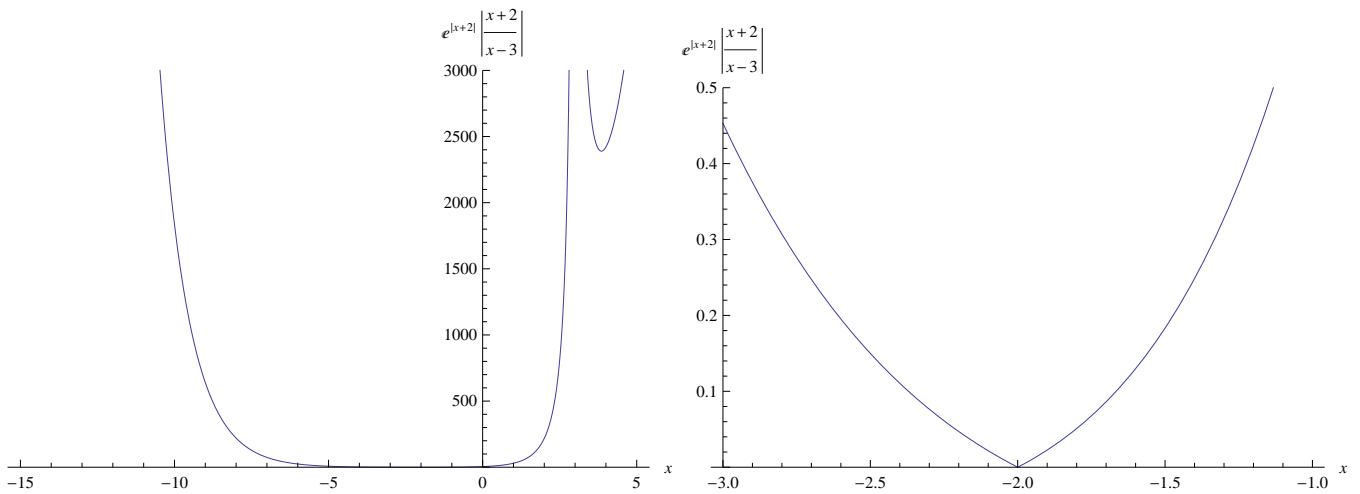


Figura 3: Il grafico di  $f(x) = \left| \frac{x+2}{x-3} \right| e^{|x+2|}$  (Tema 2); la figura sulla destra è un ingrandimento intorno al punto angoloso.

**Esercizio 2 [8 punti]** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + \sin\left(\cos \frac{1}{x} - 1\right) + \arctan \frac{1}{2x^2}}{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sin \frac{1}{x^2}}.$$

*Svolgimento.* Dati gli sviluppi

$$\sin y = y + o(y^2) \text{ per } y \rightarrow 0, \cos \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right), \arctan \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

e tenuto conto del fatto ben noto che  $e^{-x} = \frac{1}{x^\alpha}$  per  $x \rightarrow +\infty$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il numeratore risulta:

$$-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Il denominatore risulta

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Il limite pertanto risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{-\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)} = -\frac{1}{12}.$$

**Esercizio 3 [10 punti]** (a) Calcolare l'ordine di infinito per  $x \rightarrow 2$  della funzione

$$g(x) = \frac{x}{4 - x^2};$$

b) dire per quali  $\alpha \geq 0$  converge l'integrale

$$I = \int_0^2 \frac{x}{(4 - x^2)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

*Svolgimento.* (a)  $g(x) = \frac{x}{(2+x)(2-x)}$ , perciò è infinita di ordine 1 per  $x \rightarrow 2$ .

(b) Siccome l'integranda è infinita di ordine  $\alpha$  (se  $\alpha > 0$ ) per  $x \rightarrow 2^-$ , l'integrale risulta convergente se e solo se  $\alpha < 1$ . (c) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx &= (x=2t) \quad 2 \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -2(1-t^2)^{1/2} \Big|_{t=0}^{t=1} = 2. \end{aligned}$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Risolvere l'equazione

$$|z - 3i| = \left| |z| - 3 \right|$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

*Svolgimento.* Posto  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , l'equazione diventa

$$|x + i(-3 + y)| = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right|,$$

cioè

$$x^2 + (-3 + y)^2 = x^2 + y^2 + 9 - 6\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Semplificando, l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y,$$

che ha per soluzioni  $x = 0$  e  $y \geq 0$ .

Seguono soluzioni nel piano di Gauss.

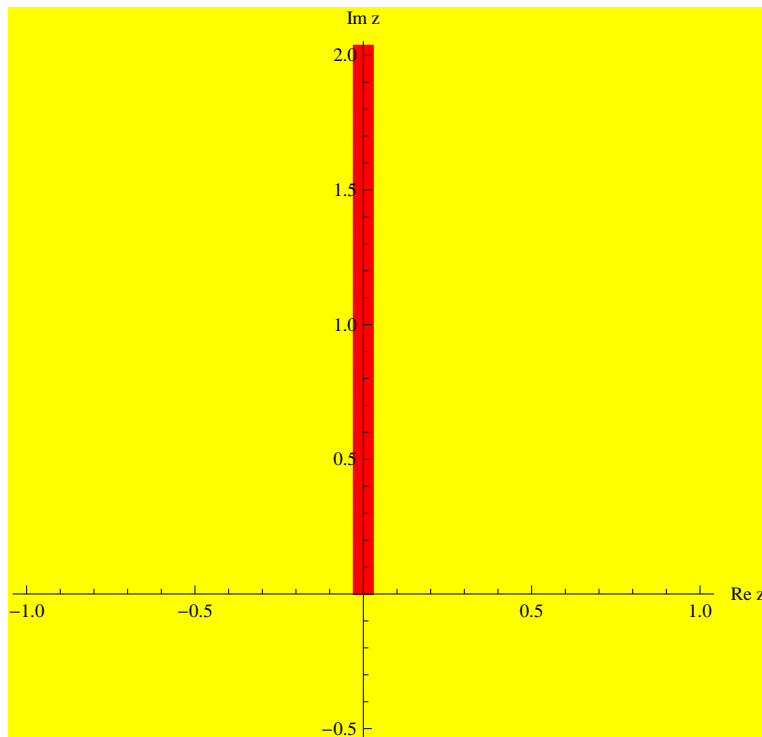


Figura 4: Soluzioni di  $|z - 3i| = \left| |z| - 3 \right|$  (Tema 2).