ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 1 e 4

Svolgimento dell'appello del 18.09.2012

TEMA 1

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln \cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.
Svolgimento. (a) Il dominio è $x \neq 0$. La funzione non presenta simmetrie evidenti e può essere riscritta come

$$f(x) = \ln \frac{\cosh x}{\sqrt{e^x|\sinh x|}}.$$

Si ha immediatamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \ln \frac{\cosh^2 x}{e^x \sinh x} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Dunque la retta $y = -\frac{1}{2}\ln 2$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^x \sinh x = -1/2$.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ si devono calcolare il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln \frac{\cosh^2 x}{-e^x \sinh x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{2(1-e^{2x})}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \frac{e^{-2x}(1+2e^{-2x}+e^{-4x})}{2(1-e^{2x})}}{2x} = -1$$

e poi il limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x| = -\frac{1}{2}\ln 2$$

(lo svolgimento di questo limite è nel Tema 2). Perciò $y = -x - \frac{1}{2}\ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
Per lo studio del segno di f, osserviamo che $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{\cosh x}{\sqrt{e^x|\sinh x|}} \geq 1,$$

cioè se e solo se

$$\cosh^2 x \geq e^x|\sinh x|. \tag{1}$$

Quest'ultima disequazione, per $x \geq 0$, è equivalente a

$$e^{4x} - 4e^{2x} - 1 \leq 0,$$

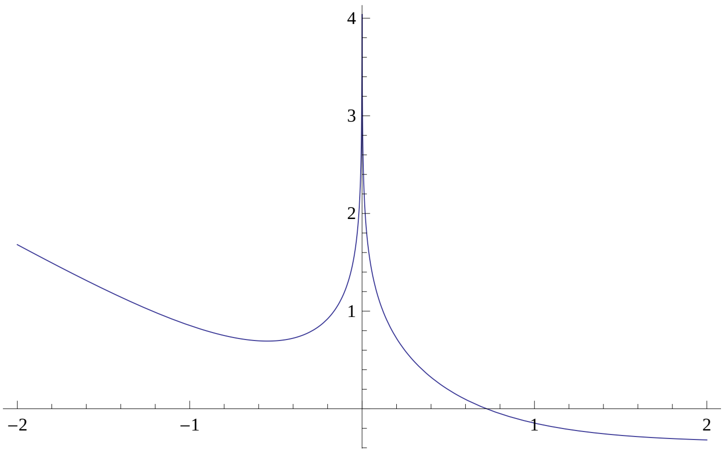

Figura 1: Il grafico di $f(x) = \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$ (Tema 1).

che ha per soluzioni $0 \le x \le \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$. Per $x < 0$ la disequazione (1) è equivalente a

$$3e^{2x} + e^{-2x} \ge 0,$$

che è sempre vera.
(b) Siccome $\frac{d}{dx}\ln|\sinh x| = \cosh x/\sinh x$ per ogni $x \neq 0$, si ha, per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 x - \cosh^2 x - \sinh x\cosh x}{2\cosh x\sinh x} = \frac{e^{-2x} - 3}{4\cosh x\sinh x}.$$

Si ha perciò che $f'(x) \ge 0$ se e solo se $-\frac{\ln 3}{2} \le x < 0$. Il punto $-\frac{\ln 3}{2}$ è perciò di minimo locale stretto.
(c) Si ha immediatamente

$$f''(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{1}{2}\frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{3}{2\cosh^2 x\sinh^2 x} > 0.$$

La funzione è perciò convessa per $x < 0$ e per $x > 0$.
(d) Il grafico è in Figura 1.

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4}\right]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi asintotici si ha, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\cos\sin\frac{1}{n} &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{n} + \frac{1}{4!}\sin^4\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2 + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{5}{24}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}$$

e

$$e^{\frac{-1}{2n^2}} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Inoltre $|e^{-n}\sin n| \le e^{-n} = o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza si ha, per $n \to +\infty$,

$$e^{-n}\sin n + \cos\sin\frac{1}{n} - e^{\frac{-1}{2n^2}} + \frac{1}{12}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Il termine generale della serie è perciò asintotico a

$$\frac{1}{6^\alpha}\frac{1}{n^{2+4\alpha}}.$$

La serie perciò converge se e solo se $2+4\alpha > 1$, cioè se e solo se

$$\alpha > -\frac{1}{4}.$$

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-27}{\big(\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\big)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}-27}{\big(\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\big)^2}\,dx &= 6\int \frac{t^3-27}{(t^3-3t^2)^2}t^5\,dt = 6\int \frac{t^4-27t}{t^2-6t+9}\,dt\\ &= 6\int \frac{t^3+6t^2+9t}{t-3}\,dt = 6\int \Big(t^2+6t+27+\frac{81}{t-3}\Big)\,dt\\ &= 6\Big(\frac{t^3}{3}+3t^2+27t+81\ln|t-3|\Big)+c\\ &= 2\sqrt{x}+18\sqrt[3]{x}+162\sqrt[6]{x}+486\ln|\sqrt[6]{x}-3|+c.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - iz^3 + 2 = 0$$

e rappresentarle sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z = w^3$. L'equazione

$$w^2 - iw + 2 = 0$$

ha per soluzioni $w = (i+\sqrt{-1-8})/2 = (i \pm 3i)/2 = 2i, -i$. Le soluzioni dell'equazione sono perciò le radici cubiche di $2i$ e di $-i$, cioè sono

$$\sqrt[3]{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}+i),\ \sqrt[3]{2}e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3}+i),\ \sqrt[3]{2}e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = -\sqrt[3]{2}\,i$$

e

$$e^{i\pi/2} = i,\ e^{i(\pi/2+2\pi/3)} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ e^{i(\pi/2+4\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

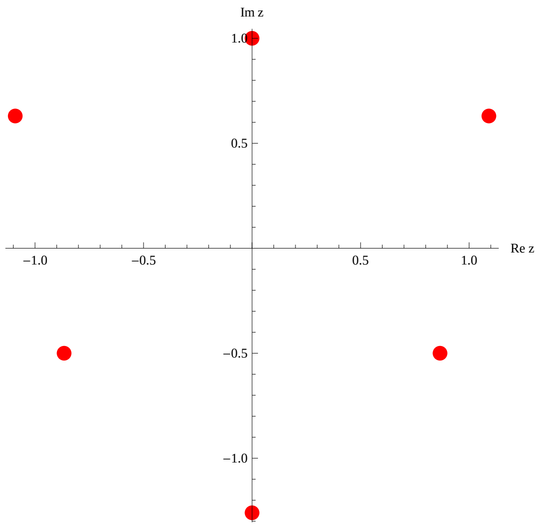

Figura 2: Le soluzioni di $z^6 - iz^3 + 2 = 0$ (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \ln \cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$$

(a) determinarne il dominio ed eventuali simmetrie, calcolarne i limiti agli estremi del dominio e determinarne gli eventuali asintoti; provare che $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$;
(b) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(c) studiarne concavità e convessità;
(d) disegnarne un grafico qualitativo.

Svolgimento. (a) Il dominio è $x \neq 0$. La funzione non presenta simmetrie evidenti e può essere riscritta come

$$f(x) = \ln \frac{\cosh x \sqrt{e^x}}{\sqrt{|\sinh x|}}.$$

Si ha immediatamente che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} \ln \frac{e^x \cosh^2 x}{-\sinh x} = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Dunque la retta $y = -\frac{1}{2}\ln 2$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sinh x} = 2$.
Per la ricerca dell'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ si devono calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln \frac{e^x \cosh^2 x}{\sinh x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{e^{3x}+e^{-x}+2e^x}{2(e^x-e^{-x})}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{e^{2x}(1+e^{-2x}+e^{-3x})}{2(1-e^{-2x})}}{2x} = 1$$

e poi il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln\cosh x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x| = -\frac{1}{2}\ln 2$$

(lo svolgimento di questo limite è nel Tema 1). Perciò $y = x - \frac{1}{2}\ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Per lo studio del segno di f, osserviamo che $f(x) \le 0$ se e solo se

$$\frac{\sqrt{e^x}\,\cosh x}{\sqrt{|\sinh x|}} \ge 1,$$

cioè se e solo se

$$e^x\,\cosh^2 x \ge |\sinh x|. \tag{2}$$

Quest'ultima disequazione, per $x \le 0$, è equivalente a

$$e^{4x} + 4e^{2x} - 1 \le 0,$$

che ha per soluzioni $0 \le x \le \frac{\ln(-2+\sqrt{5})}{2}$. Per $x > 0$ la disequazione (2) è equivalente a

$$e^{3x} + 3e^{-x} \ge 0,$$

che è sempre vera.
(b) Siccome $\frac{d}{dx}\ln|\sinh x| = \cosh x/\sinh x$ per ogni $x \ne 0$, si ha, per ogni $x \ne 0$

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{2\sinh^2 x - \cosh^2 x + \sinh x\cosh x}{2\cosh x\sinh x} = \frac{e^{2x} - 3}{4\cosh x\sinh x}.$$

Si ha perciò che $f'(x) \le 0$ se e solo se $0 < x \le \frac{\ln 3}{2}$. Il punto $\frac{\ln 3}{2}$ è perciò di minimo locale stretto.
(c) Si ha immediatamente

$$f''(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{1}{2}\frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{3}{2\cosh^2 x\sinh^2 x} > 0.$$

La funzione è perciò convessa per $x < 0$ e per $x > 0$.
(d) Il grafico è in Figura 3.

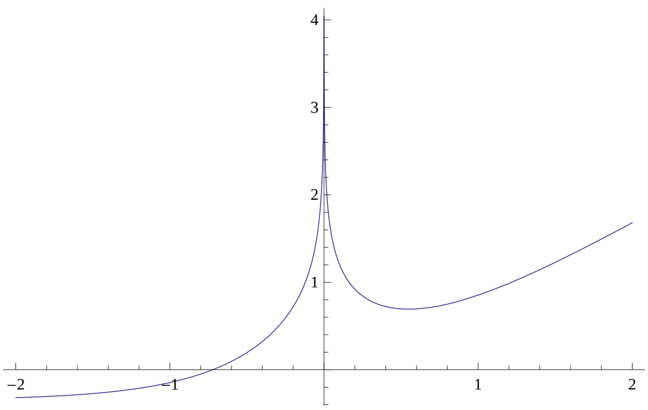

Figura 3: Il grafico di $f(x) = \ln\cosh x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sinh x|$ (Tema 2).

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\Big[\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} - e^{-2n}\cos n\Big]^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Utilizzando gli sviluppi asintotici si ha, per $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\cosh\sinh\frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2}\sinh^2\frac{1}{n} + \frac{1}{4!}\sinh^4\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{3!n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2 + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{5}{24}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\end{aligned}$$

e

$$e^{\frac{1}{2n^2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Inoltre $e^{-2n}\cos n = o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$ per $n \to +\infty$. Di conseguenza si ha, per $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + e^{-2n}\cos n + \cosh\sinh\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{2n^2}} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^4} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

Il termine generale della serie è perciò asintotico a

$$\frac{1}{6^{\alpha}}\frac{1}{n^{3+4\alpha}}.$$

La serie perciò converge se e solo se $3 + 4\alpha > 1$, cioè se e solo se

$$\alpha > -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 3 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 8}{\big(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\big)^2},$$

si calcoli una primitiva di f (sugg.: effettuare la sostituzione $x = t^6$).
Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x} - 8}{\big(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\big)^2}\,dx &= 6\int \frac{t^3 - 8}{(t^3 - 2t^2)^2}t^5\,dt = 6\int \frac{t^4 - 8t}{t^2 - 4t + 4}\,dt\\ &= 6\int \frac{t^3 + 2t^2 + 4t}{t - 2}\,dt = 6\int \Big(t^2 + 4t + 12 + \frac{24}{t - 2}\Big)\,dt\\ &= 6\Big(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 24\ln|t - 2|\Big) + c\\ &= 2\sqrt{x} + 12\sqrt[3]{x} + 72\sqrt[6]{x} + 144\ln|\sqrt[6]{x} - 2| + c.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$$

e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z = w^3$. L'equazione

$$w^2 + 2iw + 3 = 0$$

ha per soluzioni $w = -i + \sqrt{-1-3} = -i \pm 2i = i, -3i$. Le soluzioni dell'equazione sono perciò le radici cubiche di i e di $-3i$, cioè sono

$$e^{i\pi/6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i), e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = -\, i$$

e

$$\sqrt[3]{3}e^{i\pi/2} = i\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}e^{i(\pi/2+2\pi/3)} = -\sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \sqrt[3]{3}e^{i(\pi/2+4\pi/3)} = \sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

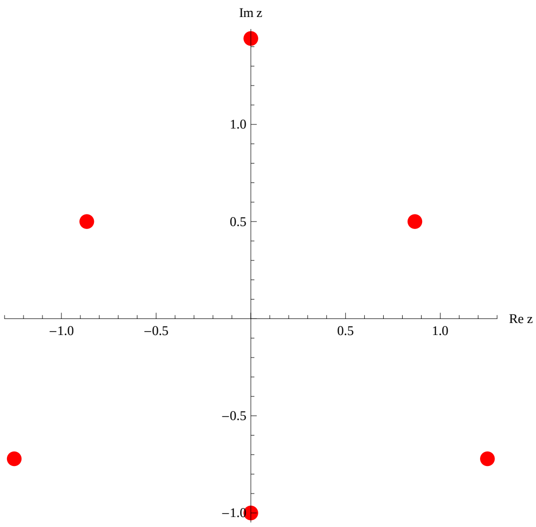

Figura 4: Le soluzioni di $z^6 + 2iz^3 + 3 = 0$ (Tema 2).