

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 5.02.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1 - 2 \log^2 x}.$$

- 1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
- 2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f .
- 3) Calcolare f' , determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
- 4) Calcolare i limiti significativi di f' .
- 5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. 1) L'argomento x di f deve soddisfare le seguenti condizioni: $x > 0$ (dominio del logaritmo), e $0 \leq 1 - 2 \log^2 x \leq 1$ (dominio della radice e dell'arcseno). La condizione $1 - 2 \log^2 x \geq 0$ dà

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \log x \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

cioè il dominio di f è l'intervallo $[e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}}]$.

2) f è visibilmente continua nel suo dominio. Le regole di derivazione si possono applicare dove le funzioni elementari di cui f è composizione sono derivabili, cioè dove l'argomento della radice non si annulla ($x \neq e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}}$) e dove l'argomento dell'arcseno è diverso da ± 1 ($x \neq 1$). La funzione risulta perciò di classe C^1 negli intervalli $]e^{-1/\sqrt{2}}, 1[$ e $]1, e^{1/\sqrt{2}}[$.

3) Si ha

$$f'(x) = \frac{-4 \log x}{x} \frac{1}{2\sqrt{1 - 2 \log^2 x}} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 2 \log^2 x)}} = -\sqrt{2} \frac{\text{sign}(\log x)}{x\sqrt{1 - 2 \log^2 x}}.$$

Il segno di f' dipende perciò solo dal segno di $\log x$, quindi f è strettamente crescente in $[e^{-1/\sqrt{2}}, 1]$ e strettamente decrescente in $[1, e^{1/\sqrt{2}}]$. Gli estremi del dominio sono perciò punti di minimo assoluto (in cui f vale 0), mentre $x = 1$ è il punto di massimo assoluto (in cui f vale $\pi/2$).

4) $\lim_{x \rightarrow e^{-1/\sqrt{2}+}} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^{1/\sqrt{2}-}} f'(x) = -\infty$, cioè agli estremi del dominio la tangente al grafico di f è verticale. Inoltre si ha $\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \sqrt{2} = -\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x)$, cioè $x = 1$ è un punto angoloso.

5) La derivata seconda non era richiesta, ma per completezza viene calcolata e studiata. Per $x \in]e^{-1/\sqrt{2}}, 1[$ si ha

$$f''(x) = \sqrt{2} \frac{-\left(\sqrt{1 - 2 \log^2 x} + x \frac{-4 \log x}{2x\sqrt{1 - 2 \log^2 x}}\right)}{x^2(1 - 2 \log^2 x)} = \sqrt{2} \frac{2 \log^2 x + 2 \log x - 1}{x^2(1 - 2 \log^2 x)^{3/2}},$$

mentre per $x \in]1, e^{1/\sqrt{2}}[$ è l'opposto. Il segno di f'' dipende perciò solo dal segno di $2 \log^2 x + 2 \log x - 1$. Le soluzioni della disequazione $2 \log^2 x + 2 \log x - 1 \geq 0$ sono: $x \leq e^{-(1+\sqrt{3})/2}$ e $x \geq e^{(-1+\sqrt{3})/2}$. Tenendo conto

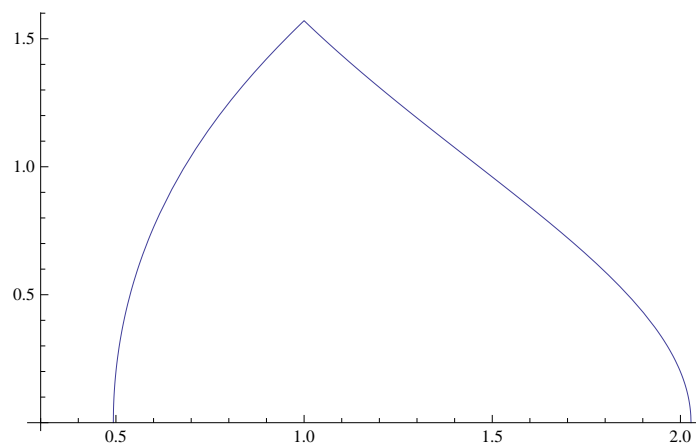


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

del fatto che $e^{-(1+\sqrt{3})/2} < e^{-1/\sqrt{2}} < 1 < e^{(-1+\sqrt{3})/2} < e^{1/\sqrt{2}}$, f risulta concava in $[e^{-1/\sqrt{2}}, 1]$, convessa in $[1, e^{(-1+\sqrt{3})/2}]$, concava in $[e^{(-1+\sqrt{3})/2}, e^{1/\sqrt{2}}]$, con un flesso a tangente obliqua in $e^{(-1+\sqrt{3})/2}$. Il grafico è perciò come in Figura .

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{4x}{1+x^2} \right)^n.$$

Svolgimento. Usiamo il criterio della radice, dal quale ricaviamo informazioni sia sulla convergenza assoluta che sull'andamento del termine generale, che chiamiamo $a_n(x)$. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \left| \frac{4x}{1+x^2} \right| = \left| \frac{4x}{1+x^2} \right|.$$

Perciò se $\left| \frac{4x}{1+x^2} \right| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente, mentre se $\left| \frac{4x}{1+x^2} \right| > 1$ la serie non converge né assolutamente né semplicemente perché il suo termine generale non è infinitesimo. La disequazione $\left| \frac{4x}{1+x^2} \right| < 1$, è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{4x}{1+x^2} < 1 \\ \frac{4x}{1+x^2} > -1. \end{cases}$$

La prima disequazione ha per soluzioni $] -\infty, 2 - \sqrt{3}[\cup] 2 + \sqrt{3}, +\infty[$. Per disparità le soluzioni del sistema, cioè i valori di x in cui la serie converge assolutamente, sono

$$]-\infty, -2 - \sqrt{3}[\cup] -2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}[\cup] 2 + \sqrt{3}, +\infty[,$$

mentre il termine generale non è infinitesimo per i valori di x appartenenti all'insieme

$$]-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}[\cup] 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}[.$$

Resta da studiare la convergenza della serie nei punti $x_1 := -2 - \sqrt{3}$, $x_2 := -2 + \sqrt{3}$, $x_3 := 2 - \sqrt{3}$, $x_4 := 2 + \sqrt{3}$, nei quali $\sqrt[n]{|a_n(x)|} \rightarrow 1$ e quindi il criterio della radice non dà informazioni. Per $x = x_1, x_2$ il

termine generale della serie risulta essere $(-1)^n/(n+1)$ e quindi la serie converge per il criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente perché il termine generale, in modulo, è asintotico al termine generale della serie armonica, $1/n$, che diverge. Per $x = x_3, x_4$ il termine generale è $1/(n+1)$ e quindi la serie non converge.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3} dx.$$

Svolgimento. Detta f l'integranda, essa è definita (e continua) per $e^x \neq 3$. Dunque $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{\log 3\})$. In particolare $f \in \mathcal{C}([\log 8, +\infty[)$ e quindi è integrabile secondo Riemann in $[\log 8, +\infty[$. Per il calcolo dell'integrale calcoliamo anzitutto una primitiva di $f(x) = \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x + 1}$, cioè $e^x = y^2 - 1$, $x = \log(y^2 - 1)$, $dx = \frac{2y}{y^2-1} dy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3} dx = \int \frac{y}{y^2 - 4} \frac{2y}{y^2 - 1} dy = 2 \int \frac{y^2 - 1 + 1}{(y^2 - 4)(y^2 - 1)} dy = 2 \left(\int \frac{1}{y^2 - 4} dy + \int \frac{1}{(y^2 - 4)(y^2 - 1)} dy \right).$$

Evidentemente

$$\int \frac{1}{y^2 - 4} dy = \int \frac{1}{(y - 2)(y + 2)} dy = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{y - 2} - \frac{1}{y + 2} \right) dy = \frac{1}{4} \log \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right|,$$

mentre

$$\int \frac{1}{(y^2 - 4)(y^2 - 1)} dy = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{y^2 - 4} - \frac{1}{y^2 - 1} \right) dy = \frac{1}{12} \log \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| - \frac{1}{6} \log \left| \frac{y - 1}{y + 1} \right|$$

e quindi, in conclusione

$$\int \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3} dx = \frac{2}{3} \log \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 2}{\sqrt{e^x + 1} + 2} \right| - \frac{1}{3} \log \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| =: F(x).$$

Ora $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ come facilmente si verifica, per cui

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3} dx = -F(\log 8) = - \left(\frac{2}{3} \log \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \log \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} \log 5 - \frac{1}{3} \log 2.$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z + 1}{2z - 1} \right)^3 = 1,$$

scrivetele in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Svolgimento. Le tre radici cubiche di 1 sono $1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{-\frac{2}{3}\pi i}$. L'equazione è equivalente alle tre equazioni

$$\frac{2z + 1}{2z - 1} = 1, \quad \frac{2z + 1}{2z - 1} = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{2z + 1}{2z - 1} = e^{-\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

La prima equazione non ha soluzioni. La seconda è equivalente all'equazione

$$2z + 1 = (2z - 1)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

che ha per soluzioni

$$z = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{3 - i\sqrt{3}} = -i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

La terza equazione è equivalente all'equazione

$$2z + 1 = (2z - 1)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

che ha per soluzioni

$$z = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{3 + i\sqrt{3}} = i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia $f \in C([0, 1])$ una funzione continua. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

Svolgimento. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e osserviamo che $f \in \mathcal{C}\left(\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]\right)$. Dunque possiamo applicare il teorema della media integrale alla funzione f nell'intervallo $\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$: esiste $\xi_n \in \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ tale che

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx = f(\xi_n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Dato che $\xi_n \in \left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]$ per ogni n , otteniamo che $\lim_n \xi_n = 0$ e dato che f è continua in 0, si ha che $\lim_n f(\xi_n) = f(0)$. Quindi

$$\lim_n n \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx = \lim_n \left[f(\xi_n) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] = f(0).$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{2}}.$$

- 1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
- 2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f .
- 3) Calcolare f' , determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
- 4) Calcolare i limiti significativi di f' .
- 5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

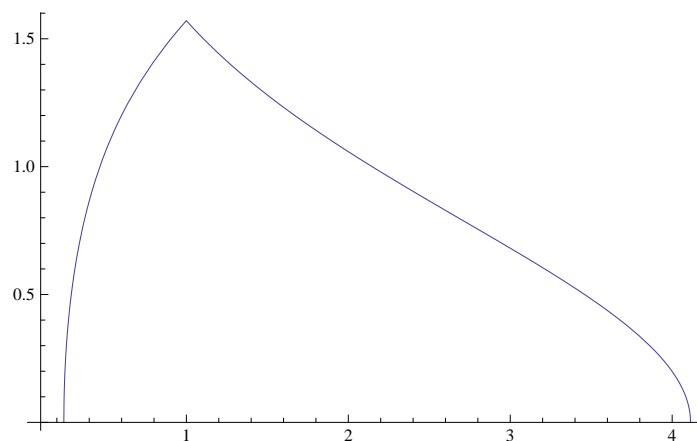


Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

Svolgimento. Per la presenza del log dobbiamo porre $x > 0$, inoltre per la radice dobbiamo porre $1 - \frac{\log^2 x}{2} \geq 0$ e per l'arcsin abbiamo $1 - \frac{\log^2 x}{2} \leq 1$. Risolvendo otteniamo che il dominio è dato da

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \left[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \right] \right\}$$

Poiché l'argomento di arcsin è non negativo anche la funzione è non negativa nel suo dominio.

2) Essendo la funzione una composizione di funzioni continue è continua nel suo dominio. Per la derivabilità possiamo solo affermare che la funzione è derivabile in $\mathcal{D}' = \left(e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \right) \setminus \{1\}$. Il punto 1 deve essere tolto per la presenza dell'arcsin, gli estremi del dominio per la radice.

3) Per ogni $x \in \mathcal{D}'$ un calcolo diretto porge

$$f'(x) = -\frac{\text{segno}(\log x)}{x\sqrt{2 - \log^2 x}}$$

Il segno è quindi deciso dalla funzione $\text{segno}(\log x)$. La funzione è crescente in $\left[e^{-\sqrt{2}}, 1 \right]$ ed è decrescente in $\left[1, e^{\sqrt{2}} \right]$. Il punto $x_1 = 1$ è un punto di massimo (assoluto), i punti $x_2 = e^{-\sqrt{2}}$ e $x_3 = e^{\sqrt{2}}$ sono punti di minimo (assoluto).

4) come descritto nel punto 2) i limiti significativi di f' sono:

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_3^-} f'(x) = -\infty$$

Quindi il punto x_1 è un punto angoloso, i punti x_2 e x_3 sono punti di cuspidi. Il grafico è perciò come in Figura .

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-8x}{4+x^2} \right)^n.$$

Usiamo il criterio della radice, dal quale ricaviamo informazioni sia sulla convergenza assoluta che sull'andamento del termine generale. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left| \frac{-8x}{4+x^2} \right|^n} = \left| \frac{-8x}{4+x^2} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \left| \frac{-8x}{4+x^2} \right|$$

Per il criterio della radice abbiamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice) per ogni x per cui $\left| \frac{-8x}{4+x^2} \right| < 1$ cioè

$$\begin{cases} \frac{-8x}{4+x^2} < 1 \\ \frac{-8x}{4+x^2} > -1 \end{cases}$$

Risolvendo il semplice sistema otteniamo convergenza assoluta (e quindi anche semplice) in

$$\mathcal{C} = \left(-\infty, -4 - 2\sqrt{3} \right) \cup \left(-4 + 2\sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3} \right) \cup \left(4 + 2\sqrt{3}, +\infty \right)$$

Il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge in

$$\mathbb{R} \setminus \bar{\mathcal{C}} = \left(-4 - 2\sqrt{3}, -4 + 2\sqrt{3} \right) \cup \left(4 - 2\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3} \right)$$

Rimane da studiare il comportamento della serie nei punti $x_1 = -4 - 2\sqrt{3}$, $x_2 = -4 + 2\sqrt{3}$, $x_3 = 4 - 2\sqrt{3}$ e $x_4 = 4 + 2\sqrt{3}$. Per $x = x_1$ o $x = x_2$ abbiamo che $\frac{-8x}{4+x^2} = 1$ e quindi il termine generico della serie diventa $\frac{1}{n}$ cioè la serie diverge a $+\infty$ in questi punti, mentre in $x = x_3$ o $x = x_4$ abbiamo che $\frac{-8x}{4+x^2} = -1$ e quindi il termine generico della serie diventa $(-1)^n \frac{1}{n}$. In tali punti abbiamo convergenza semplice (criterio di Leibniz), ma non assoluta.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

Svolgimento. Detta f l'integranda, essa è definita (e continua) per ogni $x \geq 0$. In particolare $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ e quindi è integrabile secondo Riemann in $[0, +\infty[$. Per il calcolo dell'integrale calcoliamo anzitutto una primitiva di $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x - 1}$, cioè $e^x = y^2 + 1$, $x = \log(y^2 + 1)$, $dx = \frac{2y}{y^2 + 1} dy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \int \frac{y}{y^2 + 4} \frac{2y}{y^2 + 1} dy = 2 \int \frac{y^2 + 4 - 4}{(y^2 + 4)(y^2 + 1)} dy = 2 \left(\int \frac{1}{y^2 + 1} dy - 4 \int \frac{1}{(y^2 + 4)(y^2 + 1)} dy \right).$$

Evidentemente

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan y,$$

mentre

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(y^2 + 4)(y^2 + 1)} dy &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 4} \right) dy = \frac{1}{3} \left(\arctan y - \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (y/2)^2} dy \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\arctan y - \frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2} \right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = -\frac{2}{3} \arctan \sqrt{e^x - 1} + \frac{4}{3} \arctan \frac{\sqrt{e^x - 1}}{2} =: F(x).$$

Ora $F(0) = 0$ come facilmente si verifica, per cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z + 1}{1 - 2z} \right)^3 = -1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Svolgimento. Le tre radici cubiche di -1 sono $w_1 = -1$, $w_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $w_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. L'equazione è equivalente alle tre equazioni

$$\frac{2z + 1}{1 - 2z} = -1, \quad \frac{2z + 1}{1 - 2z} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2z + 1}{1 - 2z} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

La prima non ha soluzioni, la seconda ha come soluzione $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}i$, la terza ha come soluzione $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}i$. Il grafico segue:

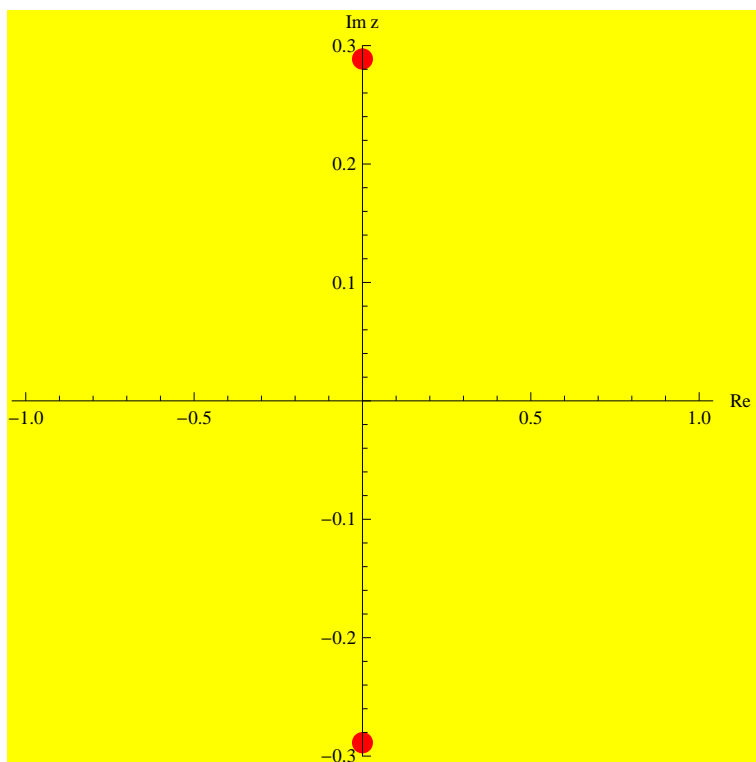


Figura 3: Le soluzioni di $\left(\frac{2z+1}{1-2z} \right)^3 = -1$ (Tema 2).

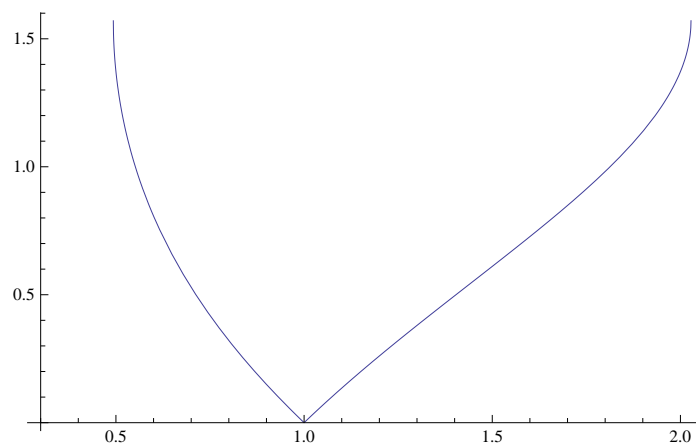


Figura 4: Il grafico di f (Tema 3).

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - 2 \log^2 x}.$$

- 1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
- 2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f .
- 3) Calcolare f' , determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
- 4) Calcolare i limiti significativi di f' .
- 5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. V. fogli a parte. Il grafico è come in Figura .

Esercizio 2 Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{12x}{9+x^2} \right)^n.$$

Svolgimento. V. fogli a parte.

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 5}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x + 4}}{e^x + 5} dx.$$

Svolgimento. V. fogli a parte.

Esercizio 4 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{3z-1} \right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Svolgimento. V. fogli a parte.

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}}.$$

- 1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
- 2) Discutere brevemente la continuità e la derivabilità di f .
- 3) Calcolare f' , determinare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di estremo.
- 4) Calcolare i limiti significativi di f' .
- 5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. 1) Chiaramente $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, 1 - \frac{\log^2 x}{3} \geq 0, \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}} \leq 1\}$. Ora

$$1 - \frac{\log^2 x}{3} \geq 0, \iff (\log x)^2 \leq 3, \iff -\sqrt{3} \leq \log x \leq \sqrt{3}, \iff e^{-\sqrt{3}} \leq x \leq e^{\sqrt{3}}.$$

Inoltre

$$\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}} \leq 1, \iff 1 - \frac{\log^2 x}{3} \leq 1, \iff \frac{\log^2 x}{3} \geq 0,$$

palesemente vera. Mettendo tutto assieme $D(f) = [e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}}]$. Passiamo al segno:

$$f(x) \geq 0, \iff \arcsin \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ma ricordato che $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ottiene che $f \geq 0$ sempre. Inoltre

$$f(x) = 0, \iff \arcsin \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}} = \frac{\pi}{2}, \iff \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}} = 1, \iff \log x = 0, \iff x = 1.$$

2),4) Continuità: le funzioni elementari sono continue dove definite, quindi f , essendo composizione di funzioni elementari, è continua sul proprio dominio. Derivabilità: le funzioni elementari sono derivabili ove definite eccetto, per quelle in considerazione nell'esercizio, la $\sqrt{\quad}$ quando il suo argomento si annulla, l' \arcsin quando l'argomento vale ± 1 . In tutti gli altri punti sicuramente f , come composizione di funzioni derivabili, è derivabile. Tali punti sono

$$1 - \frac{\log^2 x}{3} = 0, \iff x = e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}}. \quad \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}} = \pm 1, \iff x = 1.$$

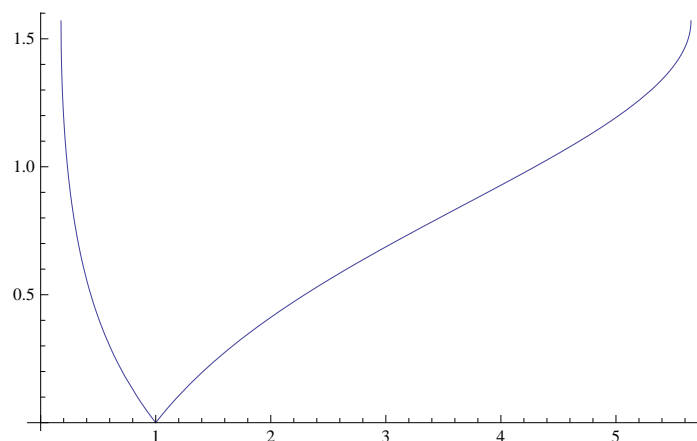


Figura 5: Il grafico di f (Tema 4).

Dunque sicuramente f è derivabile su $[e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}}] \setminus \{e^{\pm\sqrt{3}}, 1\} =]e^{-\sqrt{3}}, 1[\cup]1, e^{\sqrt{3}}[$. Quanto ai punti $x = e^{\pm\sqrt{3}}, 1$ le regole non si possono applicare e quindi occorre procedere diversamente. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}}\right)^2}} \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}}} \left(\frac{-2 \log x \cdot \frac{1}{x}}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{|\log x|} \frac{\frac{1}{x} \log x}{\sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}}} = \frac{\sqrt{3} \operatorname{sgn}(\log x)}{x \sqrt{1 - \frac{\log^2 x}{3}}}.$$

Ora possiamo vedere i limiti di f' nei punti dubbi:

$$f'(e^{-\sqrt{3}+}) = \frac{\sqrt{3} \cdot (-1)}{e^{-\sqrt{3}0+}} = -\infty, \quad f'(e^{\sqrt{3}-}) = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{e^{\sqrt{3}0+}} = +\infty.$$

e inoltre

$$f'(1-) = -\frac{\sqrt{3} \cdot 1}{1} = -\sqrt{3}, \quad f'(1+) = \frac{\sqrt{3} \cdot (1)}{1} = \sqrt{3}.$$

Da questo deduciamo che f non è effettivamente derivabile in nessuno dei punti dubbi, che $x = e^{\pm\sqrt{3}}$ sono cuspidi, che invece f è derivabile da destra e sinistra in $x = 1$ che quindi è un punto angoloso.

3) Su $D(f)$ abbiamo

$$f'(x) \geq 0, \iff \operatorname{sgn}(\log x) \leq 0, \iff \log x \leq 0, \iff x \leq 1.$$

Ne segue che $f \nearrow$ su $[e^{-\sqrt{3}}, 1]$ mentre $f \searrow$ su $[1, e^{\sqrt{3}}]$. In $x = 1$ f è continua: si deduce che è un punto di massimo globale per f con $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. I minimi si trovano nei due estremi e siccome

$$f(e^{\pm\sqrt{3}}) = \arcsin \sqrt{1 - \frac{(\pm\sqrt{3})^2}{3}} = \arcsin 0 = 0,$$

abbiamo che entrambi sono minimi globali.

Esercizio 2 [10 punti] Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{-4x}{1+x^2} \right)^n.$$

Svolgimento. Partiamo dalla convergenza assoluta, cioè dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{4x}{1+x^2} \right|^n =: \sum_n a_n$. Applichiamo il test della radice. Abbiamo

$$a_n^{1/n} = \frac{1}{n^{1/n}} \frac{4|x|}{1+x^2} \longrightarrow \frac{4|x|}{1+x^2} =: q$$

Studiamo la disequazione $\frac{4|x|}{1+x^2} \leq 1$, cioè $x^2 - 4|x| + 1 \geq 0$. Per $x \geq 0$ equivale a $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ che produce come soluzioni $x \leq \frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ oppure $x \geq \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ e quindi $x \in [0, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty[$. Per $x < 0$ equivale a $x^2 + 4x + 1 \geq 0$ che produce $x \leq -2 - \sqrt{3}$ oppure $x \geq -2 + \sqrt{3}$, cioè $] -\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, 0[$. Morale

$$q \leq 1, \iff x \in] -\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty[$$

ed il valore $q = 1$ è assunto per $x = -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$. In accordo col test della radice allora avremo che

- se $q < 1$ la serie $\sum_n a_n$ converge, quindi la serie iniziale converge assolutamente;
- se $q > 1$ la serie $\sum_n a_n$ diverge e $a_n \longrightarrow +\infty$, quindi non è verificata la condizione necessaria e quindi la serie non è convergente (né semplicemente né assolutamente);
- se $q = 1$ il test non dà indicazioni.

Rimangono dunque i casi dove $q = 1$. Per semplificare la discussione ricordiamo che in tali punti $4|x| = 1 + x^2$ per cui $-\frac{4x}{1+x^2} = \pm 1$ con segno opposto a quello di x . Pertanto

- $x = -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$: la serie è $\sum_n \frac{1}{n} (1)^n = \sum_n \frac{1}{n}$ non converge (assolutamente né semplicemente) essendo la serie armonica;
- $x = 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$: la serie è $\sum_n \frac{1}{n} (-1)^n$ che converge semplicemente per il test di Leibniz ma non assolutamente.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 4}}{e^x - 5} dx.$$

Svolgimento. Detta f l'integranda, essa è definita (e continua) per $e^x \neq 5$, cioè per $x \neq \log 5$. Dunque $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{\log 5\})$. In particolare $f \in C([\log 8, +\infty[) \subset R_{loc}[\log 8, +\infty[$. Per il calcolo dell'integrale calcoliamo anzitutto una primitiva di $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 4}}{e^x - 5}$. Sembra naturale il cambio di variabile $y = \sqrt{e^x - 4}$, cioè $e^x = y^2 + 4$, $x = \log(y^2 + 4)$, $dx = \frac{2y}{y^2 + 4} dy$ da cui

$$\int \frac{\sqrt{e^x - 4}}{e^x - 5} dx = \int \frac{y}{y^2 - 1} \frac{2y}{y^2 + 4} dy = 2 \int \frac{y^2 - 1 + 1}{(y^2 - 1)(y^2 + 4)} dy = 2 \left(\int \frac{1}{y^2 + 4} dy + \int \frac{1}{(y^2 - 1)(y^2 + 4)} dy \right).$$

Evidentemente

$$\int \frac{1}{y^2 + 4} dy = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (y/2)^2} dy = \frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2}.$$

mentre

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(y^2 - 1)(y^2 + 4)} dy &= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{y^2 - 1} - \frac{1}{y^2 + 4} \right) dy = -\frac{1}{10} \arctan \frac{y}{2} + \frac{1}{10} \int \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y + 1} \right) dy \\ &= -\frac{1}{10} \arctan \frac{y}{2} + \frac{1}{10} \log \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right|. \end{aligned}$$

e quindi, in conclusione

$$\int \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^x - 3} dx = \frac{4}{5} \arctan \sqrt{e^x - 4} + \frac{2}{5} \log \left| \frac{\sqrt{e^x - 4} - 2}{\sqrt{e^x - 4} + 2} \right| =: F(x).$$

Ora $F(+\infty) = \frac{4}{5} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{5}$ come facilmente si verifica, per cui

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 4}}{e^x - 5} dx = \frac{2\pi}{5} - F(\log 8) = \frac{2\pi}{5} - \frac{4}{5} \arctan 2.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z + 1}{1 - 3z} \right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

Svolgimento. Poniamo $w = \frac{3z+1}{1-3z}$. Allora $w^3 = 1$, cioè w sono le tre radici complesse di 1:

$$w = 1, -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto

$$\frac{3z + 1}{1 - 3z} = 1, -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ora,

$$\frac{3z + 1}{1 - 3z} = \zeta, \iff 3z + 1 = \zeta(1 - 3z), \iff 3z(1 + \zeta) = \zeta - 1, \iff z = \frac{1 \zeta - 1}{3 \zeta + 1}.$$

Dunque $z = 0$ oppure

$$z = \frac{1 - \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - 3 \pm i \sqrt{3}}{3 \cdot 1 \pm i \sqrt{3}} = \frac{1 - 3 \pm i \sqrt{3}}{3 \cdot 1 \pm i \sqrt{3}} \frac{1 \mp i \sqrt{3}}{1 \mp i \sqrt{3}} = \frac{1 - 3 + 3 \pm i 4 \sqrt{3}}{4} = \pm i \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.