

**ANALISI MATEMATICA 1**  
 Area dell'Ingegneria dell'Informazione  
**Appello del 20.02.2013**

**TEMA 1**

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = x \left| 3 + \frac{1}{\log(2x)} \right|,$$

- (a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
- (b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
- (c) calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ;
- (d) calcolare i limiti significativi di  $f'$ ;
- (e) disegnare un grafico qualitativo di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.* (a) Il dominio è  $x > 0$ ,  $x \neq \frac{1}{2}$ . Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui  $x = \frac{1}{2}$  è un asintoto verticale. Siccome

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log 2x} = +\infty,$$

non ci sono asintoti obliqui.

(b) Siccome  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , la funzione è prolungabile con continuità in  $x = 0$ . È anche derivabile in tutti i punti del dominio in cui non si annulla l'argomento del modulo, cioè per  $x$  nel dominio,  $x \neq \frac{e^{-1/3}}{2}$ .

(c) Per tali  $x$  si ha:

$$f'(x) = \left| 3 + \frac{1}{\log(2x)} \right| + x \operatorname{sign} \left( 3 + \frac{1}{\log(2x)} \right) \frac{-1}{x \log^2(2x)}.$$

Siccome

$$3 + \frac{1}{\log(2x)} > 0 \Leftrightarrow x \in ]0, \frac{e^{-1/3}}{2} [ \cup ] \frac{1}{2}, +\infty [,$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 3 + \frac{1}{\log(2x)} - \frac{1}{\log^2(2x)} = \frac{3 \log^2(2x) + \log(2x) - 1}{\log^2(2x)} & \text{per } ]0, \frac{e^{-1/3}}{2} [ \cup ] \frac{1}{2}, +\infty [ \\ -3 - \frac{1}{\log(2x)} + \frac{1}{\log^2(2x)} = \frac{-3 \log^2(2x) - \log(2x) + 1}{\log^2(2x)} & \text{per } x \in ] \frac{e^{-1/3}}{2}, \frac{1}{2} [ . \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione  $3 \log^2(2x) + \log(2x) - 1 = 0$  sono  $e^{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}}/2$  e si ha

$$\frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2} < \frac{e^{-1/3}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2},$$

per cui

$x$	$]0, \frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2} [$	$] \frac{e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}}}{2}, \frac{e^{-1/3}}{2} [$	$] \frac{e^{-1/3}}{2}, \frac{1}{2} [$	$] \frac{1}{2}, \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2} [$	$] \frac{e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{6}}}{2}, +\infty [$
$\operatorname{sgn} f'$	+	-	+	-	+
$f$	↗	↘	↗	↘	↗

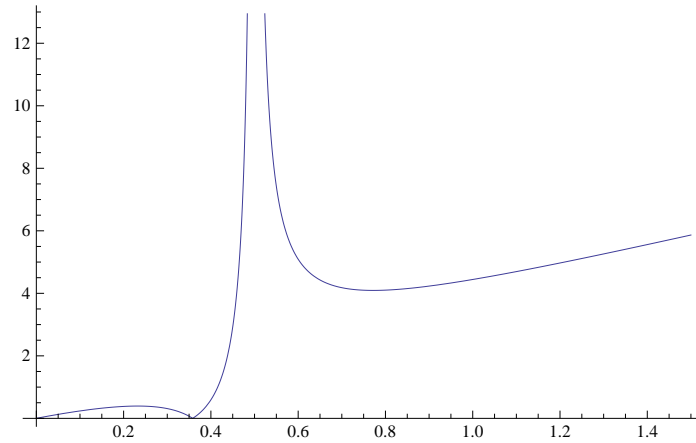


Figura 1: Il grafico di  $f$  (Tema 1).

e quindi  $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$  è un punto di massimo locale stretto,  $0$  e  $\frac{e^{-1/3}}{2}$  sono punti di minimo assoluto, mentre  $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$  è un punto di minimo locale stretto.

(d) I limiti significativi di  $f'$  sono

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{e^{-1/3}}{2}^-} f'(x) = -9, \quad \lim_{x \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{e^{-1/3}}{2}^-} f'(x) = -3^+} f'(x) = 9,$$

per cui  $\frac{e^{-1/3}}{2}$  è un punto angoloso.

(e) Il grafico è come in figura

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{7/2} \log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos(1 - e^{\sqrt{2}x})}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

*Svolgimento.* Gli sviluppi di McLaurin danno, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \sin x^2 &= x^2 + o(x^5), \\ \cos(1 - e^{\sqrt{2}x}) - 1 &= -\frac{1}{2}(1 - e^{\sqrt{2}x})^2 + \frac{1}{24}(1 - e^{\sqrt{2}x})^4 + o(x^4) \\ &= -\frac{1}{2}(\sqrt{2}x + x^2 + o(x^2))^2 \\ &= -x^2 - \sqrt{2}x^3 + o(x^3), \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \\ x^{7/2} \log x &\sim x^4 \log^2 x = o(x^3). \end{aligned}$$

Perciò il numeratore è

$$-\sqrt{2}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

mentre il denominatore, per  $x \rightarrow 0$ , è

$$\begin{aligned} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{ se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{x^3}{6} + o(x^3) & \text{ se } \alpha = 1 \\ x + o(x) & \text{ se } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Si ha perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x^4 \log x - 1 + \sin x^2 + \cos(1 - e^{\sqrt{2}x})}{\sinh x - x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{2}x^3 + o(x^3)}{\sinh x - x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq 3 \\ -6\sqrt{2} & \text{se } \alpha = 3. \end{cases}$$

**Esercizio 3** Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} dx$$

*Svolgimento.* Con la sostituzione  $y = 1/x$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^b \frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} dx \\ &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{b}} y^2 \sin y dy = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin y dy \\ &= -y^2 \cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2y \cos y dy \\ &= 2y \sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy \\ &= \pi - 2. \end{aligned}$$

**Esercizio 4** Risolvere l'equazione

$$|z^2(z - \overline{(z - 4i)})| = |z\bar{z} - z(z - 4i)|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

*Svolgimento.* Si ha

$$\begin{aligned} |z^2(z - \overline{(z - 4i)})| &= |z| |z(z - \overline{(z - 4i)})| = |z| |z(z - (\bar{z} + 4i))| = |z| |z(2i \operatorname{Im} z - 4i)| \\ |z\bar{z} - z(z - 4i)| &= |z| |\bar{z} - (z - 4i)| = |z| |4i - 2i \operatorname{Im} z|, \end{aligned}$$

per cui  $z = 0$  è una soluzione. Se  $z \neq 0$  l'equazione diventa

$$|z| |\operatorname{Im} z - 2| = |\operatorname{Im} z - 2|,$$

che ha per soluzioni  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  e  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 2\}$ . Le soluzioni sono in figura .

**Esercizio 5 [facoltativo]** Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua e crescente. Sia

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0.$$

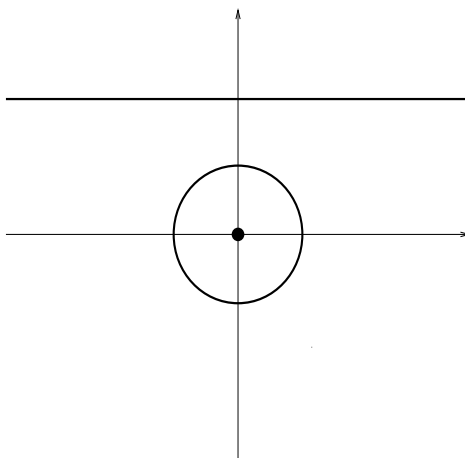


Figura 2: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

Si provi che  $g$  è crescente.

*Svolgimento.* La funzione  $g$  è derivabile e si ha

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x} (f(x) - g(x)).$$

Per il teorema della media integrale, per ogni  $x > 0$  esiste  $\xi_x \in [0, x]$  tale che  $g(x) = f(\xi_x)$ . Siccome  $f$  è crescente, ne segue che  $g(x) \leq f(x)$ , per cui  $g'(x) \geq 0$ .

## TEMA 2

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = x \left| 2 - \frac{1}{\log(3x)} \right|,$$

- determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
- studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
- calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ;
- calcolare i limiti significativi di  $f'$ ;
- disegnarne un grafico qualitativo di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.*

- Il dominio è dato da  $x > 0$  (per la presenza del log) e  $3x \neq 0$  (perché log è al denominatore). Quindi chiamando  $\mathcal{D}$  il dominio abbiamo

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

Per quanto riguarda il segno è evidente che  $f \geq 0$  sul dominio. Limiti notevoli si calcola facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{possibili asintoti obliqui}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -\infty$$

Quindi non ci sono asintoti obliqui, né orizzontali ma un asintoto verticale in  $x = 1$ .

- (b) Come visto nel punto (a) c'è un prolungamento per continuità in  $x = 0$  ponendo la funzione  $f$  uguale a 0 nel punto 0. Con questo prolungamento la funzione è continua in

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \{0\}.$$

Per il calcolo della derivata prima per la presenza del valore assoluto dobbiamo porre  $2 - \frac{1}{\log 3x} \neq 0$  cioè  $x \neq \frac{\sqrt{e}}{3} = x_1$ . Nota che  $f(x_1) = 0$  e quindi per quanto detto  $x_1$  è un punto di minimo assoluto.

- (c) e (d) Un calcolo diretto mostra che  $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_1\}$

$$f'(x) = \left| 2 - \frac{1}{\log 3x} \right| + x \operatorname{segno} \left( 2 - \frac{1}{\log 3x} \right) \cdot \frac{1}{\log^2 3x} \frac{1}{x} = \left| 2 - \frac{1}{\log 3x} \right| + \operatorname{segno} \left( 2 - \frac{1}{\log 3x} \right) \cdot \frac{1}{\log^2 3x}$$

Poiché per definizione di  $x_1$  l'argomento del valore assoluto si annulla e  $\operatorname{segno} \left( 2 - \frac{1}{\log 3x} \right) = 1$  se  $x \in \left( 0, \frac{1}{3} \right) \cup (x_1 + \infty) = \mathcal{P}$  e  $\operatorname{segno} \left( 2 - \frac{1}{\log 3x} \right) = -1$  se  $x \in \left( \frac{1}{3}, x_1 \right) = \mathcal{N}$  abbiamo l'attacco di  $f$  in  $x_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^\pm} f'(x) = \pm 4$$

$x_1$  è quindi un punto di minimo assoluto e punto angoloso. Vediamo anche l'attacco (destra) in 0. Si ottiene subito che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$$

e quindi il prolungamento in 0 è anche  $\mathcal{C}^1$ . Il punto 0 è un altro punto di minimo assoluto.

Per quanto riguarda il segno è evidente che se  $x \in \mathcal{P}$   $f'(x) > 0$  e quindi la funzione è qui monotona strettamente crescente. Per  $x \in \mathcal{N}$  si vede con un breve calcolo che  $f'(x) < 0$  e quindi la funzione è in questo insieme strettamente monotona decrescente.

- (e) Il grafico segue:

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2 + \cos \log(1 + \sqrt{2}x) - 1 + x^{13/4} \log^2 x}{\sin x - x^\alpha}$$

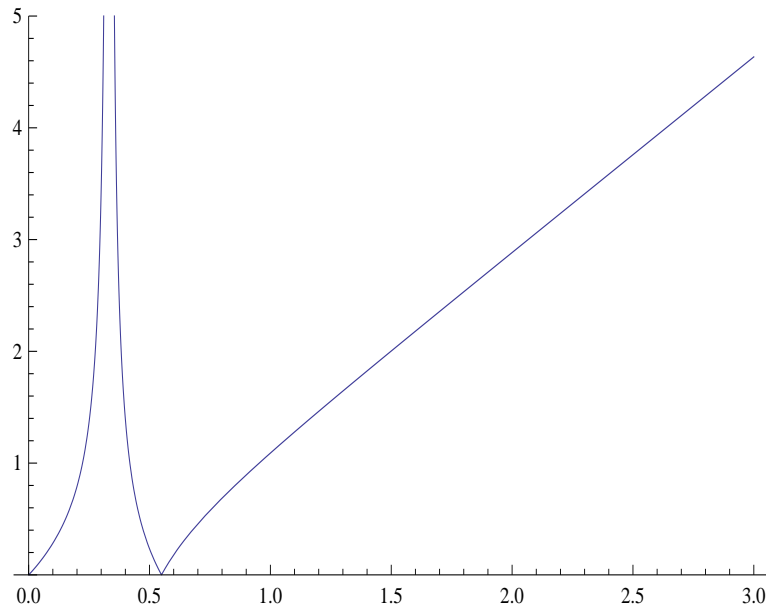


Figura 3: Il grafico di  $f(x) = x \left| 2 - \frac{1}{\log(3x)} \right|$  (Tema 2).

al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

*Svolgimento.* Sviluppamo i termini al numeratore  $\sin x^2 = x^2 + o(x^5)$ ,

$$\cos(1 + \log(\sqrt{2}x)) = \cos\left(\sqrt{2}x - x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^3 + o(x^3)\right) = 1 - x^2 + \sqrt{2}x^3 + o(x^3)$$

Notiamo inoltre che  $x^{13/4} \log^2 x = o(x^3)$  e quindi il numeratore diventa uguale a  $\sqrt{2}x^3$  e quindi se  $\alpha < 1$  oppure  $\alpha > 1$  il limite vale 0. Se  $\alpha = 1$  allora il denominatore diventa  $-\frac{x^3}{6}$  e quindi per il PSI il limite per  $\alpha = 1$  vale  $-6\sqrt{2}$ .

**Esercizio 3** Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x} dx$$

*Svolgimento.* Integriamo prima per sostituzione ponendo  $\frac{1}{x} = t$  l'integrale diventa allora

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos t dt$$

Integrando due volte per parti abbiamo

$$\int t^2 \cos t dt = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t$$

Sostituendo gli estremi di integrazione otteniamo

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x} dx = \int_0^{\pi} t^2 \cos t dt = -2\pi$$

**Esercizio 4** Risolvere l'equazione

$$|z^2(z - \overline{(z - 2i)})| = |z\bar{z} - z(z - 2i)|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

*Svolgimento.* Scrivendo  $z = x + iy$  e svolgendo alcuni semplici calcoli otteniamo che il primo membro diventa

$$2|y - 1|(x^2 + y^2)$$

mentre il secondo diventa

$$2\sqrt{x^2 + y^2}|y - 1|$$

Perciò l'equazione di partenza diventa

$$|y - 1|\sqrt{x^2 + y^2} = |y - 1|(x^2 + y^2)$$

Quindi se  $y \neq 1$  e  $z \neq 0$  l'equazione diventa equivalente a  $x^2 + y^2 = 1$  che è l'equazione di una circonferenza di raggio 1 senza il punto  $y = 1$ . Se  $y = 1$  l'equazione è verificata per ogni  $x \in \mathbb{R}$  infine abbiamo la soluzione  $z = 0$ . Ricapitolando, le soluzioni sono  $z = x + i$  e  $z = \cos\theta + i\sin\theta$  con  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $z = 0$ . Il grafico segue:

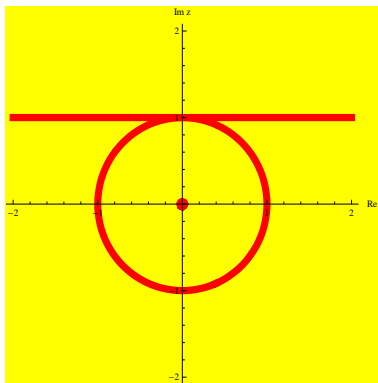


Figura 4: Le soluzioni di  $|z^2(z - \overline{(z - 2i)})| = |z\bar{z} - z(z + 2i)|$  (Tema 2).

## TEMA 3

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = x \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right|,$$

- determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
- studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
- calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ;
- calcolare i limiti significativi di  $f'$ ;
- disegnarne un grafico qualitativo di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x \sin x^4 + \cosh(e^{\sqrt{2}x} - 1) - 1 - \sin x^2}{x^\alpha - \sin x}$$

al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

**Esercizio 3** Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} dx$$

**Esercizio 4** Risolvere l'equazione

$$|z^2(\overline{(z+4i)} - z)| = |z(z+4i) - z\bar{z}|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

## Appello del 20.02.2013

### TEMA 4

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = x \left| 6 - \frac{1}{\log x} \right|,$$

- (a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
- (b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
- (c) calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$ ;
- (d) calcolare i limiti significativi di  $f'$ ;
- (e) disegnarne un grafico qualitativo di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.* **Domínio:** chiaramente  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \log x \neq 0\} = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

**Segno:** banalmente  $f \geq 0$  su tutto il suo dominio. Su  $D(f)$ , essendo  $x > 0$  ha  $f(x) = 0$  sse  $6 - \frac{1}{\log x} = 0$  cioè  $\log x = \frac{1}{6}$ ,  $x = e^{1/6}$ .

**Limiti e asintoti:** Dobbiamo calcolare  $f(0+)$ ,  $f(1\pm)$ ,  $f(+\infty)$ . Per  $x \rightarrow 0+$  chiaramente  $6 - \frac{1}{\log x} \rightarrow 6$  quindi  $f(0+) = 0+$ . Per  $x \rightarrow 1$  si ha che  $\left| 6 - \frac{1}{\log x} \right| \rightarrow +\infty$ , per cui  $f(1\pm) = +\infty$ . La funzione presenta un asintoto verticale  $x = 1$ . A  $+\infty$  infine, di nuovo  $6 - \frac{1}{\log x} \rightarrow 6$  per cui  $f(+\infty) = +\infty$ . Ci potrebbe essere un asintoto obliquo  $y = mx + q$ . Abbiamo che

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| 6 - \frac{1}{\log x} \right| = 6,$$

mentre

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \left| 6 - \frac{1}{\log x} \right| - 6x \right).$$

Ora per  $x \rightarrow +\infty$ , chiaramente  $6 - \frac{0}{\log x} > 0$  per cui il limite precedente diventa

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 6 - \frac{1}{\log x} - 6 \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 \frac{x}{\log x} = -\infty,$$

essendo  $x \gg_{+\infty} \log x$ . Se ne deduce che non c'è asintoto a  $+\infty$ .

**Continuità e derivabilità:** La funzione è composizione di funzioni continue sul proprio dominio e quindi è continua sul suo dominio. Rispetto alla derivabilità si può dire lo stesso eccetto per il fatto che il modulo non è derivabile dove si annulla il suo argomento. Questo succede per  $x = e^{1/6}$ . Quindi certamente possiamo concludere che  $f$  è derivabile su tutto il proprio dominio eccetto (al più) in  $x = e^{1/6}$ . Calcoliamo  $f'$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \left| 6 - \frac{1}{\log x} \right| + x \operatorname{sgn} \left( 6 - \frac{1}{\log x} \right) \cdot \left( 6 - \frac{1}{\log x} \right)' \\ &= \left| 6 - \frac{1}{\log x} \right| + x \operatorname{sgn} \left( 6 - \frac{1}{\log x} \right) \cdot \frac{1}{x(\log x)^2} = \operatorname{sgn} \left( 6 - \frac{1}{\log x} \right) \left( 6 - \frac{1}{\log x} + \frac{1}{(\log x)^2} \right) \\ &= \operatorname{sgn} \left( 6 - \frac{1}{\log x} \right) \left( \frac{6(\log x)^2 - \log x + 1}{(\log x)^2} \right). \end{aligned}$$

Da questa deduciamo che

$$f'(e^{1/6\pm}) = \lim_{x \rightarrow e^{1/6\pm}} \operatorname{sgn} \left( 6 - \frac{1}{\log x} \right) \left( \frac{6(\log x)^2 - \log x + 1}{(\log x)^2} \right) = (-1\pm) \cdot (1) = -1\pm,$$

per cui  $f$  è derivabile da destra e sinistra in  $x = e^{1/6}$  ma le due derivate unilaterali non coincidono. Ciò significa che effettivamente  $f$  non è derivabile in  $x = e^{1/6}$  e che questi è un punto angoloso.

**Prolungabilità:** In  $x = e^{1/6}$   $f$  non è in alcun modo prolungabile con continuità (e quindi a maggior ragione con derivabilità). In  $x = 0$  essendo  $f(0+) = 0$ ,  $f$  può essere prolungata con continuità assegnandole il valore 0. Essendo poi

$$f'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} \left( 6 - \frac{1}{\log x} \right) \left( \frac{6(\log x)^2 - \log x + 1}{(\log x)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} 6 \cdot \frac{6(\log x)^2}{(\log x)^2} = 36,$$

il prolungamento in  $x = 0$  è derivabile da destra con derivata pari a 36.

**Monotonia:** Vediamo dove  $f'(x) > 0$ . Abbiamo che

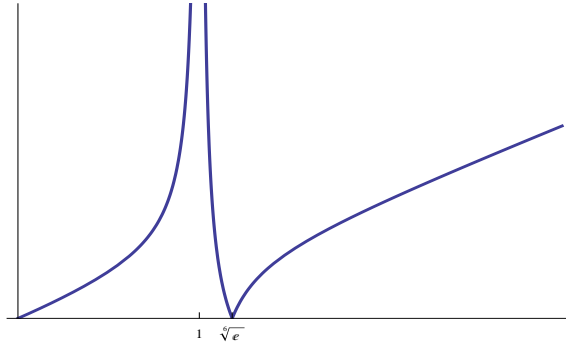
$$6(\log x)^2 - \log x + 1 > 0, \quad \iff \quad 6t^2 - t + 1 > 0, \quad (t = \log x).$$

Essendo  $(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 < 0$  si deduce che la precedente è sempre vera. D'altro canto

$$6 - \frac{1}{\log x} = \frac{6 \log x - 1}{\log x},$$

e, osservato che  $1 < e^{1/6}$ , abbiamo

	$]0, 1[$	$]1, e^{1/6}[$	$]e^{1/6}, +\infty[$
$\operatorname{sgn} \log x$	-	+	+
$\operatorname{sgn} (6 \log x - 1)$	-	-	+
$\operatorname{sgn} \left( \frac{6 \log x - 1}{\log x} \right)$	+	-	+
$\operatorname{sgn} (6(\log x)^2 - \log x - 1)$	+	+	+
$\operatorname{sgn} f'$	+	-	+
$f$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$



Nel punto  $x = e^{1/6}$   $f$  è continua, decrescente a sinistra e crescente a destra: se ne deduce che il punto  $x = e^{1/6}$  è un minimo locale. Essendo poi  $f(e^{1/6}) = 0$  e  $f \geq 0$  sempre, segue che  $x = e^{1/6}$  è un minimo globale. Non ci sono massimi né locali né globali ( $f$  illimitata).

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 \log x - \sinh x^2 + \cosh \log(1 - \sqrt{2}x) - 1}{x^\alpha - \arctan x}$$

al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

*Svolgimento.* Per il limite notevole,  $x^4 \log x \rightarrow 0$ , e facilmente si vede che abbiamo una forma  $\frac{0}{0}$ . Sviluppiamo numeratore e denominatore. Ricordiamo che

$$\sinh t = t + o(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3), \quad \log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4),$$

così

$$\begin{aligned} -\sinh x^2 + \cosh \log(1 - \sqrt{2}x) - 1 &= -\left(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) + \cosh\left(-\sqrt{2}x - x^2 + o(x^2)\right) - 1 \\ &= -\left(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) + \left(1 + \frac{(-\sqrt{2}x - x^2 + o(x^2))^2}{2} + o\left(-\sqrt{2}x - x^2 + o(x^2)\right)^4\right) - 1 \\ &= -\left(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) + x^2 + \sqrt{2}x^3 + o(x^3) = \sqrt{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Pertanto

$$N(x) = x^4 \log x + \sqrt{2}x^3 + o(x^3) = \sqrt{2}x^3 + o(x^3) \sim_0 \sqrt{2}x^3.$$

essendo  $x^{15/4} \log^3 x = o(x^3)$  poiché  $\frac{x^4 \log x}{x^3} = x \log x \rightarrow 0$ . Per quanto riguarda il denominatore ricordiamo che

$$\arctan t = t + o(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

dunque

$$D(x) = x^\alpha - \arctan x = x^\alpha - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \begin{cases} (\alpha < 1), & x^\alpha + o(x^\alpha) \sim_0 x^\alpha, \\ (\alpha = 1), & \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim_0 \frac{x^3}{3}, \\ (\alpha > 1), & -x + o(x) \sim_0 -x. \end{cases}$$

In conclusione allora

$$\frac{N(x)}{D(x)} \sim_{0^+} \begin{cases} (\alpha < 1), & \frac{\sqrt{2}x^3}{x^\alpha} = \sqrt{2}x^{3-\alpha} \longrightarrow 0, \\ (\alpha = 1), & \frac{\sqrt{2}x^3}{\frac{x^3}{3}} = 3\sqrt{2} \longrightarrow 3\sqrt{2}, \\ (\alpha > 1), & \frac{\sqrt{2}x^3}{-x} = -\sqrt{2}x^2 \longrightarrow 0. \end{cases}$$

**Esercizio 3** Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sinh \frac{1}{x} dx$$

*Svolgimento.* La funzione integranda è definita e continua su  $[1, +\infty[$ , ed è quindi localmente integrabile. Calcoliamo una primitiva. Abbiamo

$$\int \frac{1}{x^4} \sinh \frac{1}{x} dx \stackrel{y=\frac{1}{x}, x=\frac{1}{y}, dx=-\frac{1}{y^2}dy}{=} \int y^4 \sinh y \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = - \int y^2 \sinh y dy.$$

Ora si procede facilmente per parti:

$$\begin{aligned} \int y^2 \sinh y dy &= \int y^2 (\cosh y)' dy = y^2 \cosh y - \int 2y \cosh y dy = y^2 \cosh y - 2 \int y (\sinh y)' dy \\ &= y^2 \cosh y - 2 \left( y \sinh y - \int \sinh y dy \right) = y^2 \cosh y - 2 (y \sinh y - \cosh y), \end{aligned}$$

da cui

$$\int \frac{1}{x^4} \sinh \frac{1}{x} dx = \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right) \cosh \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \sinh \frac{1}{x}.$$

Ora

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sinh \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right) \cosh \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \sinh \frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=R} = 2 - \cosh 1 + 2 \sinh 1.$$

**Esercizio 4** Risolvere l'equazione

$$|z^2(z - \overline{(z + 2i)})| = |z\bar{z} - z(z + 2i)|$$

e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

*Svolgimento.* Osserviamo anzitutto che possiamo riscrivere l'equazione come

$$|z|^2 |i\Im z - 2i| = |z| |i\Im z - 2i|,$$

da cui evidentemente o  $|z| = 0$  (cioè  $z = 0$ ) oppure  $|i\Im z - 2i| = 0$  oppure, semplificando (cioè dividendo per  $|z| |i\Im z - 2i|$ ), si ha  $|z| = 1$ . Dunque le soluzioni sono

$$z = 0, \quad i\Im z = 2i, \quad |z| = 1,$$

rispettivamente: l'origine, la retta  $y = 2$  (nel piano  $xy$ ) e la circonferenza unitaria.

Tempo a disposizione: due ore e 45 minuti. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.