

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Appello del 15.07.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \cosh x - \log |\sinh x - 1|.$$

- 1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
- 2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f .
- 3) Calcolare f' , determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.
- 4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento.

- 1) Il dominio della funzione è dato da $\sinh x \neq 1$ cioè $x \neq \log(1 + \sqrt{2})$. Per quanto riguarda il segno, la funzione è positiva se e solo se $\log \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 0$ quindi se e solo se $\frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 1$ che è equivalente a $e^{2x} + 1 > |e^{2x} - 2e^x - 1|$. Per $x > \log(1 + \sqrt{2})$ la disuguaglianza è evidente e quindi la funzione è positiva. Per $x < \log(1 + \sqrt{2})$ la disuguaglianza sopra diventa $e^x - 1 > 0$ cioè $x > 0$. In definitiva $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$.
- 2) Vediamo i limiti significativi. È immediato vedere che

$$\lim_{x \rightarrow \log(1 + \sqrt{2})} f(x) = +\infty$$

abbiamo ora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{e^{2x} + 1}{|e^{2x} - 2e^x - 1|} \right) = 0$$

perché sia a $+\infty$ che a $-\infty$ l'argomento del log tende a 1. Per quanto calcolato la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale, mentre la retta $x = \log(1 + \sqrt{2})$ è asintoto verticale completo.

- 3) La funzione è evidentemente (continua e) derivabile nel suo dominio, cioè in $\frac{\mathbb{R}}{\log(1 + \sqrt{2})}$. Un calcolo facile mostra che

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x - 1} = \frac{1 + \sinh x}{\cosh x(1 - \sinh x)}$$

Per $x > \log(1 + \sqrt{2})$, evidentemente $f'(x) < 0$ e quindi la funzione è decrescente (strettamente). Per $x \in (0, \log(1 + \sqrt{2}))$ è sempre evidente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione è crescente, Per $x < 0$ il segno è determinato da $1 + \sinh x$. E perciò la funzione è crescente se e solo se $e^{2x} + 2e^x - 1 > 0$ cioè $x \in (\log(\sqrt{2} - 1), 0)$. Perciò $x = \log(\sqrt{2} - 1)$ è un punto di minimo (assoluto).

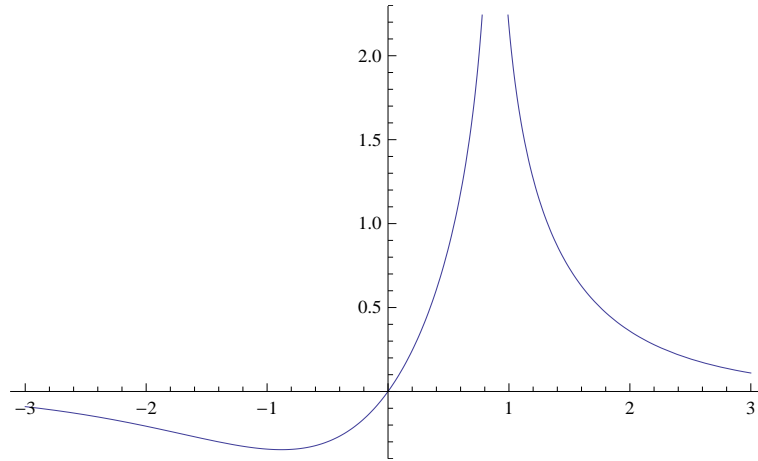


Figura 1: Grafico funzione $f(x) = \log \cosh x - \log |\sinh x - 1|$.

Esercizio 2

a) Dato il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \quad (1)$$

calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \log(n!) + \cos n \right) \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \log(n+1) - \arctan \left(\frac{1}{n} \right) \log(n-1) \right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \dots + \log 2 = \sum_{k=1}^n \log k \leq n \log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \rightarrow \infty$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.

Da (1) e dal fatto che $\cos n$ è limitato, e quindi $\cos n = o(n^2)$ per $n \rightarrow \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \cos n \sim n^2 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{1}{n} \right) \log(n+1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \left(\log n + \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned} \arctan \left(\frac{1}{n} \right) \log(n-1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \left(\log n - \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$. Quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \rightarrow \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned} (n^2 + \log(n!) + \cos n) \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) \right) &= (n^2 + o(n^2)) \left(\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\rightarrow 2 \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Esercizio 3

a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno costante in $[0, +\infty)$, per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \rightarrow +\infty$, se $\alpha > 0$,

$$\frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1} \sim \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}} dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 1$. Per $\alpha \leq 0$ si ha $\frac{|e^{2\alpha x} - 1|}{e^{2x} + 1} \leq \frac{1}{e^{2x}}$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 1$.

b) Ponendo $t = \log x$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{t - 1}{(t^2 + 1)t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{t - 1}{t^3 + t} dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{t - 1}{t^3 + t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1} = \frac{-1}{t} + \frac{t + 1}{t^2 + 1},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{t - 1}{t^3 + t} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t} + \frac{t + 1}{t^2 + 1} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t} + \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2 + 1} + \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \log \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\bar{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^5 = 16\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^5 e^{5i\vartheta} = 2^4 e^{i\pi} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{6i\vartheta} = e^{i\pi},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/6 + k\pi/3, \quad k = 0, \dots, 5.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i, \quad 2e^{i\pi/2} = 2i, \quad 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i, \\ 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i, \quad 2e^{3i\pi/2} = -2i, \quad 2e^{i11\pi/6} = \sqrt{3} - i$$

(v. figura).

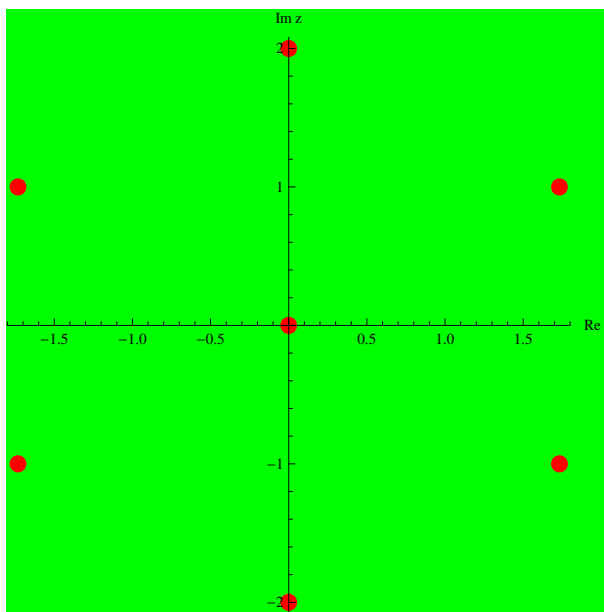


Figura 2: Soluzione esercizio 4 Tema 1.

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log |\sinh x - 2| - \log \cosh x.$$

- 1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
- 2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f .
- 3) Calcolare f' , determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.
- 4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : \sinh x \neq 2\}$. Risolvendo l'equazione

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$$

si ottiene

$$e^{2x} - 4e^x - 1 = 0,$$

la cui unica soluzione è $\log(2 + \sqrt{5})$. Il dominio pertanto è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \log(2 + \sqrt{5})\}$.

Il segno di f è positivo, per $x > \log(2 + \sqrt{5})$, se e solo se

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2 \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè mai. Per $x < \log(2 + \sqrt{5})$ invece il segno è positivo se e solo se

$$2 - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè se e solo se $x \leq \log 2$ (che è $< \log(2 + \sqrt{5})$).

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{e^x - e^{-x} - 4}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \frac{2 - \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \frac{4 - e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$. Infine si ha

$$\lim_{x \rightarrow \log(2 + \sqrt{5})} f(x) = -\infty,$$

cioè $x = \log(2 + \sqrt{5})$ è asintoto verticale.

La funzione è visibilmente derivabile in tutto il dominio e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x}{\sinh x - 2} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x + 2 \sinh x}{(\sinh x - 2) \cosh x} = \frac{1 + 2 \sinh x}{(\sinh x - 2) \cosh x} & \text{per } x > \log(2 + \sqrt{5}) \\ \frac{-\cosh x}{2 - \sinh x} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1 + 2 \sinh x}{(\sinh x - 2) \cosh x} & \text{per } x < \log(2 + \sqrt{5}). \end{cases}$$

Il segno di f' è visibilmente positivo per $x > \log(2 + \sqrt{5})$, mentre per $x < \log(2 + \sqrt{5})$ è negativo se e solo se $1 + 2 \sinh x < 0$, cioè se e solo se $x > \log(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2})$. Quindi $x = \log(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2})$ è un punto di massimo locale stretto. Il grafico è come in figura.

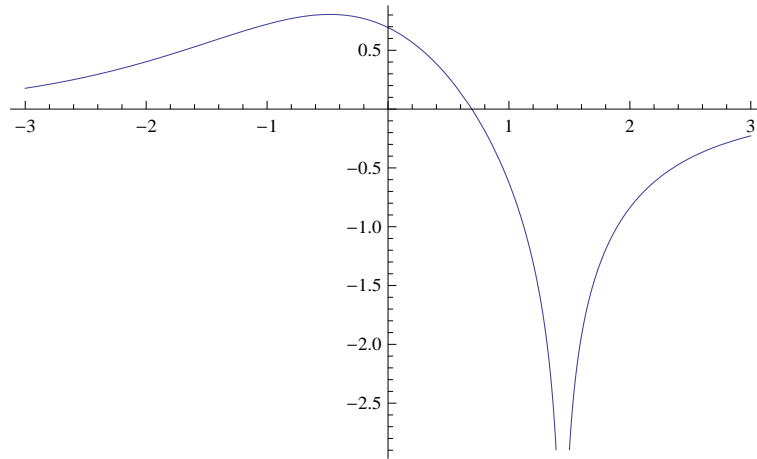


Figura 3: Grafico funzione $f(x) = \log |\sinh x - 2| - \log \cosh x$.

Esercizio 2

a) Dato il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \quad (1)$$

calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \log(n!) + \sin n \right) \left(\sinh \left(\frac{1}{n} \right) \log(n-1) - \arctan \left(\frac{1}{n} \right) \log(n+1) \right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \dots + \log 2 = \sum_{k=1}^n \log k \leq n \log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \rightarrow \infty$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.

Da (1) e dal fatto che $\sin n$ è limitato, e quindi $\sin n = o(n^2)$ per $n \rightarrow \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \sin n \sim n^2 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \sinh \left(\frac{1}{n} \right) \log(n-1) &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \left(\log n - \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned} \arctan \left(\frac{1}{n} \right) \log(n+1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \left(\log n + \frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

per $n \rightarrow \infty$. Quindi

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right) \log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \log(n+1) = -\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \rightarrow \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned} \left(n^2 + \log(n!) + \sin n\right) \left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right) \log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \log(n+1)\right) &= (n^2 + o(n^2)) \left(-\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\rightarrow -2 \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Esercizio 3

a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 3} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno definitivamente costante per $x \rightarrow +\infty$, per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \rightarrow +\infty$ e $\alpha > 0$,

$$\frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 3} \sim \frac{-1}{e^{(2-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(2-\alpha)x}} dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 2$. Per $\alpha \leq 0$ si ha $\frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 3} \leq \frac{1}{e^{2x}}$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 2$.

b) Ponendo $t = \log x$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 - e^x}{e^{2x} + 3} dx = \int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{(t^2 + 3)t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{t^3 + 3t} dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{3 - t}{t^3 + 3t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 3} = \frac{1}{t} - \frac{t + 1}{t^2 + 3},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{t^3 + 3t} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t + 1}{t^2 + 3} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2 + 3} - \frac{1}{t^2 + 3} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + \log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} \\ &= \log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = -2(1 + \sqrt{3}i)\bar{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^3 = 4\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^3 e^{3i\vartheta} = 4e^{4i\pi/3} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{4i\vartheta} = e^{4i\pi/3},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/3 + k\pi/2, \quad k = 0, \dots, 3.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$\begin{aligned} 2e^{i\pi/3} &= 1 + i\sqrt{3}, & 2e^{5i\pi/6} &= -\sqrt{3} + i, \\ e^{i4\pi/3} &= -1 - i\sqrt{3}, & e^{i11\pi/6} &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

(v. figura).

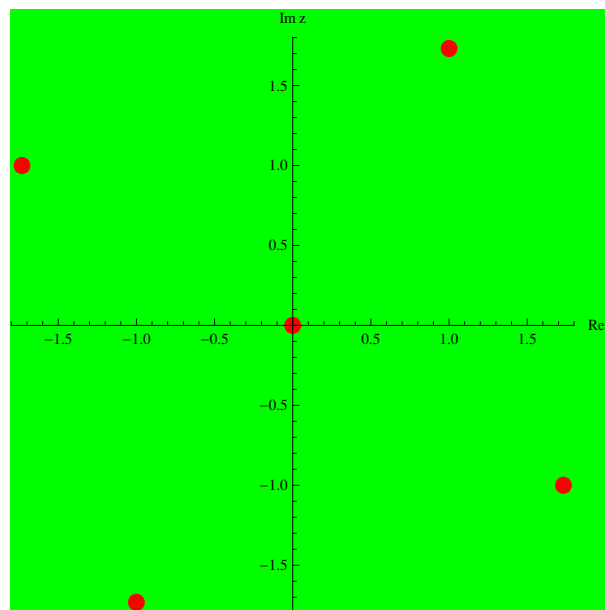


Figura 4: Soluzione esercizio 4 Tema 2.