

**ANALISI MATEMATICA 1**  
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

**Appello del 19.02.2014**

**TEMA 1**

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 - |x|)e^{\frac{1}{2x+2}}.$$

- 1) Determinare il dominio e discutere il segno di  $f$ .
- 2) Calcolare i limiti significativi di  $f$  e determinarne gli asintoti.
- 3) Calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di  $f$ .
- 4) Calcolare i limiti significativi di  $f'$  e studiare la derivabilità di  $f$  in  $x = 0$ .
- 5) Disegnare un grafico di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.*

- 1) Il dominio è dato da  $2x + 2 \neq 0$  i.e.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}.$$

Inoltre  $f > 0$  se  $|x| < 1$ .

- 2) Calcoliamo i limiti significativi

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

dove la prima forma indeterminata si risolve usando le proprietà dell'esponenziale. Dall'ultimo limite otteniamo la possibilità di asintoti obliqui. Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp 1$$

e quindi rimane da calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - e^{\frac{1}{2x+2}}\right) + 1 = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{1}{2x+2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Perciò la retta  $y = -x + 1/2$  è asintoto obliquo destro. Allo stesso modo abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-1 + e^{\frac{1}{2x+2}}\right) + 1 = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{2x+2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

e quindi la retta  $y = x + 3/2$  è asintoto obliquo sinistro.

3) Per  $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$  abbiamo

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{2x+2}} \left( \text{segno}(x) + \frac{1-|x|}{2(x+1)^2} \right)$$

Per  $x > 0$  otteniamo che  $f'(x) > 0$  se e solo se  $1 + \frac{1-x}{2(x+1)^2} < 0$  cioè  $2x^2 + 3x + 3 < 0$ , evidentemente assurdo. Quindi in  $\mathbb{R}^+$  la funzione è strettamente monotona decrescente. Per  $x < 0$  abbiamo che  $f'(x) > 0$  se e solo se  $-1 + \frac{1+x}{2(x+1)^2} < 0$  cioè per  $x < -1$  e  $0 > x > -\frac{1}{2}$ . Quindi la funzione è strettamente monotona crescente in  $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$ . Quindi il punto  $x_1 = -\frac{1}{2}$  è un punto di minimo relativo proprio.

4) I limiti significativi di  $f'$  sono in  $1^-$  e in 0. In  $1^-$  abbiamo  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 0$  per la presenza dell'esponenziale. Mentre in 0 otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{e}$$

Quindi il punto  $x_0 = 0$  è un punto angoloso e di MAX RELATIVO.

5) Il grafico della funzione segue:

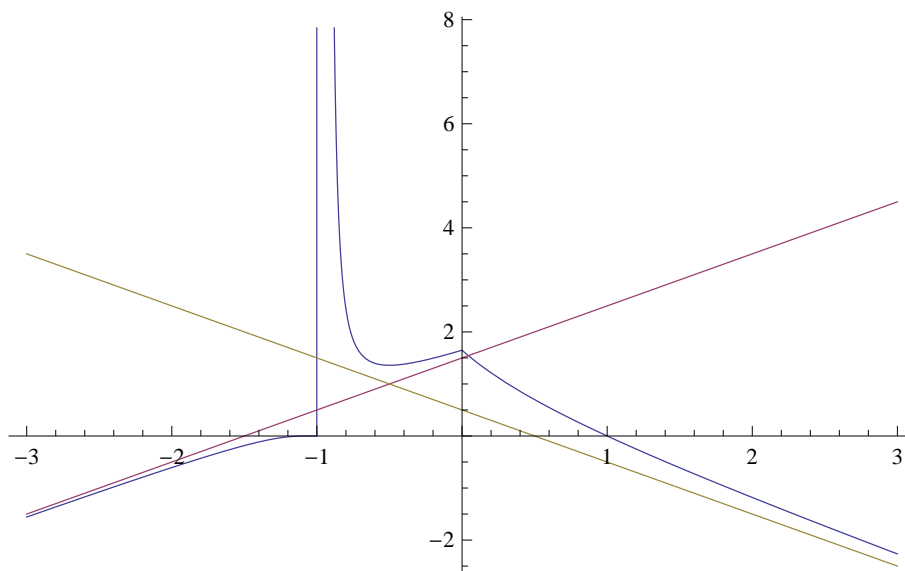


Figure 1: Il grafico di  $f$  (Tema 1).

**Esercizio 2** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} \frac{x^n}{(x+4)^n}$$

- 1) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza assoluta.
- 2) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza semplice.

*Svolgimento.*

1),2) Applichiamo il criterio della radice per la convergenza assoluta e quindi semplice della serie. Siamo portati quindi a calcolare il seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n-1}{n^2+1} \frac{|x|}{|x+4|}} = \frac{|x|}{|x+4|} = L$$

Quindi se  $L > 1$  poiché il termine n-esimo della serie non tende a 0, non abbiamo nemmeno convergenza semplice, mentre se  $L < 1$  abbiamo convergenza assoluta e quindi semplice. La disequazione  $\frac{|x|}{|x+4|} < 1$  è equivalente a  $x^2 < (x^2 + 8x + 16)$ . Quindi per  $x > -2$  la serie converge assolutamente mentre per  $x < -2$  la serie non converge nemmeno semplicemente. Vediamo il caso  $x = -2$ ; in questo caso il termine n-esimo della serie diventa

$$(-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$$

come si vede facilmente tale termine è infinitesimo e decrescente. Quindi per il criterio di Leibniz abbiamo convergenza semplice ma NON assoluta, poiché tale termine è asintotico a  $\frac{1}{n}$ .

**Esercizio 3** Calcolare

$$\int_2^{10} \arctan(\sqrt[3]{x-2}) dx.$$

*Svolgimento.* Poniamo  $x-2 = t^3$  e quindi l'integrale diventa (usando integrazione per parti)

$$\begin{aligned} \int_0^2 \arctan t \cdot 3t^2 dt &= t^3 \arctan t \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^3}{t^2+1} dt = 8 \arctan 2 - \int_0^2 \left( t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt \\ &= 8 \arctan 2 - 2 + \frac{1}{2} \log(x^2+1) \Big|_0^2 = 8 \arctan 2 - 2 + \frac{1}{2} \log 5 \end{aligned}$$

**Esercizio 4** Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| |z+i|^2 + (z+i)^2 \right| \geq \left| |z+i|^2 - \overline{(z+i)^2} \right| \right\}.$$

*Svolgimento.* Ponendo  $z = x + iy$  abbiamo che

$$\left| |z+i|^2 + (z+i)^2 \right| = \left| x^2 + (y+1)^2 + x^2 - (y+1)^2 + 2ix(y+1) \right| = 2|x| \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

mentre

$$\left| |z+i|^2 - \overline{(z+i)^2} \right| = \left| x^2 + (y+1)^2 - (x - i(y+1))^2 \right| = 2|y+1| \sqrt{(y+1)^2 + x^2}$$

Quindi le soluzioni della disequazione sono date dall'unione dei seguenti insiemi:

$$(0, -1) \cup \{(x, y) : |x| \geq |y+1|\}$$

Poiché  $|x| \geq |y+1|$  è equivalente a  $(x-y-1)(x+y+1) \geq 0$  e  $(0, -1)$  appartiene a tale insieme, le soluzioni sono date dall'insieme in verde sotto riportato

## TEMA 2

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = (2 - |x|)e^{\frac{1}{2x+4}}.$$

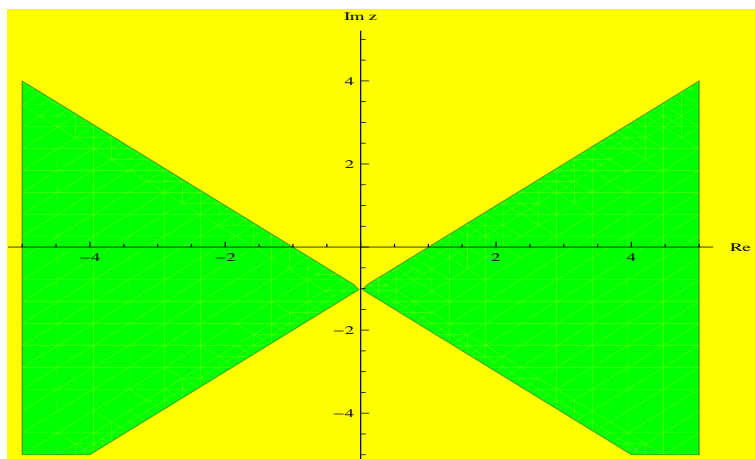


Figure 2: Soluzione dell'esercizio 4 del Tema 1 .

- 1) Determinare il dominio e discutere il segno di  $f$ .
- 2) Calcolare i limiti significativi di  $f$  e determinarne gli asintoti.
- 3) Calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di  $f$ .
- 4) Calcolare i limiti significativi di  $f'$  e studiare la derivabilità di  $f$  in  $x = 0$ .
- 5) Disegnare un grafico di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.* 1) Il dominio di  $f$  è  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  e  $f$  è positiva se e solo se  $|x| < 2$ .

2) Evidentemente  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ , mentre  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$  ( $x = -2$  asintoto verticale destro). Quest'ultimo limite è una conseguenza immediata dei confronti tra esponenziali e potenze. Per quanto riguarda gli asintoti orizzontali, si ha:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = -1$  e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^{\frac{1}{2x+4}}) + 2e^{\frac{1}{2x+4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{-1}{2x+4} + o\left(\frac{-1}{2x+4}\right) \right) + 2 = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

mentre  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x}{x} e^{\frac{1}{2x+4}} = 1$  e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{2x+4}} - 1) + 2e^{\frac{1}{2x+4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{2x+4} + o\left(\frac{-1}{2x+4}\right) \right) + 2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Quindi  $y = -x + 3/2$  è asintoto obliquo per  $x \rightarrow +\infty$ , mentre  $y = x + 5/2$  lo è per  $x \rightarrow -\infty$ .

3) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{2x+4}} + (2-x) \frac{-2}{(2x+4)^2} e^{\frac{1}{2x+4}} & \text{per } x > 0 \\ e^{\frac{1}{2x+4}} + (2+x) \frac{-2}{(2x+4)^2} e^{\frac{1}{2x+4}} & \text{per } x < 0, x \neq -2. \end{cases} = \begin{cases} -2e^{\frac{1}{2x+4}} \frac{2x^2+7x+10}{(2x+4)^2} & \text{per } x > 0 \\ 2e^{\frac{1}{2x+4}} \frac{2x^2+7x+6}{(2x+4)^2} & \text{per } x < 0, x \neq -2. \end{cases}$$

Il trinomio  $2x^2 + 7x + 10$  è sempre positivo e quindi  $f$  è strettamente decrescente per  $x > 0$ . Il trinomio  $2x^2 + 7x + 6$  ha per zeri  $-2$ , da scartare, e  $-3/2$ , quindi  $f'(x) < 0$  se e solo se  $-2 < x < -3/2$ . Quest'ultimo

- punto è perciò un punto di minimo relativo stretto, mentre  $x = 0$  è un punto di massimo relativo stretto.
- d) Si ha  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 3/4e^{1/4}$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -5/4e^{1/4}$ , e quindi 0 è un punto angoloso.
- e) Il grafico di  $f$ , con i rispettivi asintoti, è in figura.

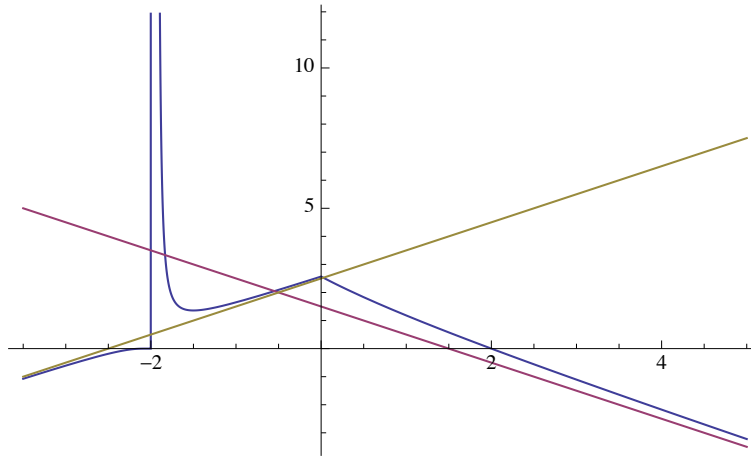


Figure 3: Grafico della funzione del Tema 2 .

**Esercizio 2** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \frac{x^n}{(9+x)^n}.$$

- 1) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza assoluta.
- 2) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza semplice.

*Svolgimento.* 1) Il criterio della radice dà che la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n(n+1)} \frac{|x|}{|x+9|}} = \frac{|x|}{|x+9|} =: L < 1,$$

mentre se  $L > 1$  il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge neanche semplicemente. La disequazione  $\frac{|x|}{|x+9|} < 1$  è equivalente alla disequazione  $x^2 < (x+9)^2$ , che ha per soluzioni la semiretta  $x > -9/2$ . Quindi la serie converge assolutamente, e semplicemente, per  $x > -9/2$ , mentre non converge né assolutamente né semplicemente per  $x < -9/2$ . Per  $x = -9/2$  la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}. \tag{1}$$

Il termine generale, in valore assoluto, è asintotico a  $\frac{1}{n}$  e quindi la serie (1) diverge assolutamente. Siccome la successione  $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$  è decrescente, in quanto  $\frac{d}{dx} \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{-x^2-4x-2}{x^2(x+1)^2} < 0$  per  $x > 0$  la serie (1) converge per il criterio di Leibniz.

**Esercizio 3** Calcolare

$$\int_3^{30} \arctan(\sqrt[3]{x-3}) dx.$$

*Svolgimento.* Si ha

$$\begin{aligned}\int_3^{30} \arctan(\sqrt[3]{x-3}) dx &= (\text{ponendo } x-3 = t^3, \text{ da cui } dx = 3t^2 dt) = 3 \int_0^3 t^2 \arctan t dt \\ &= (\text{per parti}) = t^3 \arctan t \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^3}{t^2+1} dt \\ &= 27 \arctan 3 - \int_0^3 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt \\ &= 27 \arctan 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \log(t^2+1) \Big|_0^3 \\ &= 27 \arctan 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \log 10.\end{aligned}$$

**Esercizio 4** Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| |z-i|^2 + (z-i)^2 \right| \geq \left| |z-i|^2 - \overline{(z-i)^2} \right| \right\}.$$

*Svolgimento.* Ponendo  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , la disequazione

$$\left| |z-i|^2 + (z-i)^2 \right| \geq \left| |z-i|^2 - \overline{(z-i)^2} \right|$$

diventa

$$\left| |x+i(y-1)|^2 + (x+i(y-1))^2 \right| \geq \left| |x+i(y-1)|^2 - (x-i(y-1))^2 \right|,$$

cioè

$$\left| x^2 + (y-1)^2 + x^2 - (y-1)^2 + 2ix(y-1) \right| \geq \left| x^2 + (y-1)^2 - x^2 + (y-1)^2 + 2ix(y-1) \right|,$$

che si semplifica in

$$\left| x^2 - ix(y-1) \right| \geq \left| (y-1)^2 + ix(y-1) \right|.$$

Passando al quadrato dei moduli, la disequazione precedente equivale a

$$x^4 + x^2(y-1)^2 \geq (y-1)^4 + x^2(y-1)^2,$$

che a sua volta equivale a

$$(x^2 + (y-1)^2)(x^2 - (y-1)^2) \geq 0,$$

cioè

$$(x + (y-1))(x - (y-1)) \geq 0. \tag{2}$$

La regione descritta dalla disuguaglianza (2) è quella colorata in figura.

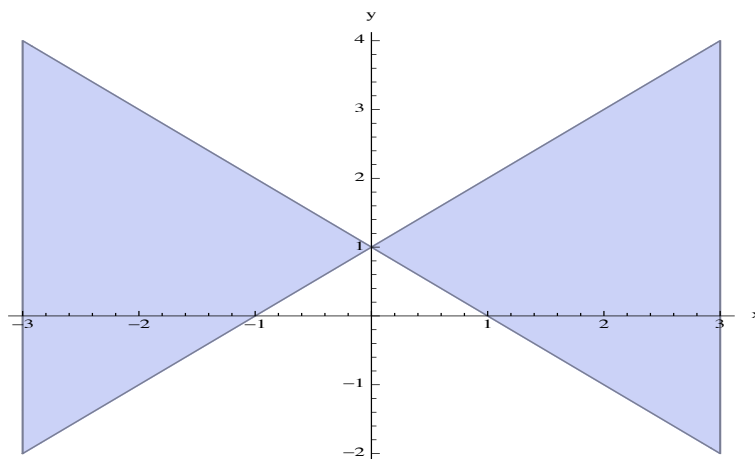


Figure 4: Soluzione dell'esercizio 4 del Tema 2 .

## TEMA 3

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = (|x| - 2)e^{\frac{1}{4-2x}}.$$

- 1) Determinare il dominio e discutere il segno di  $f$ .
- 2) Calcolare i limiti significativi di  $f$  e determinarne gli asintoti.
- 3) Calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di  $f$ .
- 4) Calcolare i limiti significativi di  $f'$  e studiare la derivabilità di  $f$  in  $x = 0$ .
- 5) Disegnare un grafico di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.*  $\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$ .

Si ha  $f(x) \geq 0 \iff |x| - 2 \geq 0 \iff x \leq -2$  o  $x \geq 2$ .

Limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (|x| - 2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{4-2x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left( \text{pongo } t = \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t/2}}{t} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left( \text{pongo } t = \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-t/2}}{t} = -\infty.$$

Asintoti. La retta  $x = 2$  è asintoto verticale sinistro. Per l'asintoto obliquo destro calcolo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{4-2x}} = 1$$

e poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)e^{\frac{1}{4-2x}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{1}{4-2x}} - 1 \right) x - 2e^{\frac{1}{4-2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4-2x} + o\left(\frac{1}{4-2x}\right) \right) x - 2 =$$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{4-2x} \right) - 2 = -\frac{1}{2} - 2$ . Quindi la retta  $y = x - \frac{5}{2}$  è asintoto obliquo destro.  
Per l'asintoto obliquo sinistro calcolo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{4-2x}} = -1$$

e poi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)+x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-2)e^{\frac{1}{4-2x}}+x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{\frac{1}{4-2x}}+1)x-2e^{\frac{1}{4-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{4-2x} + o\left(\frac{1}{4-2x}\right) \right) x - 2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{x}{4-2x} \right) - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Quindi la retta  $y = -x - \frac{3}{2}$  è asintoto obliquo sinistro.

Derivata prima. Si ha per  $x > 0$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{4-2x}} + (x-2)e^{\frac{1}{4-2x}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2-x)^2} = e^{\frac{1}{4-2x}} \left( 1 + \frac{1}{2(x-2)} \right) = e^{\frac{1}{4-2x}} \frac{2x-3}{2(x-2)}.$$

e  $f'(x) \geq 0$  per  $x \geq 2$  e  $0 < x < 3/2$ . La funzione è crescente per  $x > 2$  e per  $0 < x < 3/2$  quindi  $x = 3/2$  è punto di massimo locale con  $f(3/2) = -\frac{1}{2}e$ .

Per  $x < 0$  si ha

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{4-2x}} - (x+2)e^{\frac{1}{4-2x}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2-x)^2} = e^{\frac{1}{4-2x}} \left( -1 + \frac{x+2}{2(x-2)^2} \right) = -e^{\frac{1}{4-2x}} \frac{(10-7x+2x^2)}{2(x-2)^2}.$$

Si vede subito che  $-(10-7x+2x^2) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$  e quindi  $f(x)$  risulta decrescente per  $x < 0$ .  
 $x = 0$  risulta punto di minimo locale.

Studio dei limiti di  $f'$  per  $x \rightarrow 0$ . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{4-2x}} \frac{2x-3}{2(x-2)} = \frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -e^{\frac{1}{4-2x}} \frac{(10-7x+2x^2)}{2(x-2)^2} = -\frac{10}{8}e^{\frac{1}{4}}.$$

Quindi  $x = 0$  è un punto angoloso. Infine

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{4-2x}} \frac{2x-3}{2(x-2)} = 0.$$

Il grafico di  $f$  e degli asintoti è in figura.

**Esercizio 2** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n}{n(n+2)} \frac{x^n}{(x+2)^n}.$$

- 1) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza assoluta.
- 2) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza semplice.

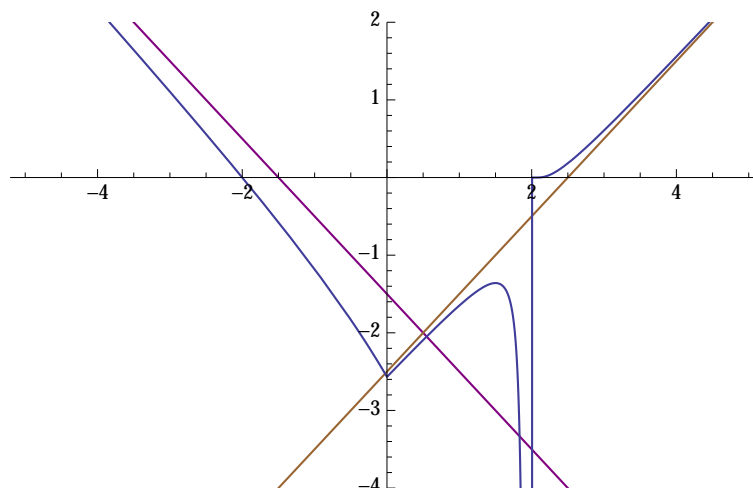


Figure 5: Il grafico di  $f$  e degli asintoti (Tema 3)

*Svolgimento.* Usando il criterio della radice si trova

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1+n}{n(n+2)} \frac{x^n}{(x+2)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n}{n(n+2)} \frac{|x|}{|x+2|}} = \frac{|x|}{|x+2|}$$

Si ha convergenza assoluta se  $\frac{|x|}{|x+2|} < 1 \iff x > -1$ .

Se  $\frac{|x|}{|x+2|} > 1$  cioè se  $x \in (-\infty, -1)$  il termine ennesimo non tende a 0, e non può esserci convergenza assoluta (né semplice).

Infine se  $\frac{|x|}{|x+2|} = 1$  cioè se  $x = -1$  la serie de moduli diventa  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+n)}{n(n+2)}$  che è divergente avendo lo stesso comportamento della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  e quindi in tale punto non c'è convergenza assoluta.

Per la convergenza semplice, essa sussiste per  $x > -1$  dato che la convergenza assoluta implica la semplice. Per  $x = -1$  la serie diventa  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{n(n+2)}$ . Tale serie converge per il criterio di Leibnitz dato che  $\frac{(1+n)}{n(n+2)} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  e la successione  $\left( \frac{(1+n)}{n(n+2)} \right)_n$  è decrescente. Infatti

$$\frac{(1+n)}{n(n+2)} \geq \frac{(n+2)}{(n+1)(n+3)} \iff (n+1)^2(n+3) \geq n(n+2)^2$$

che si vede facilmente essere equivalente a  $(n+3)(n+1) \geq n$  che è sempre vera. Pertanto la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) in  $x = -1$ .

**Esercizio 3** Calcolare

$$\int_4^{68} \arctan(\sqrt[3]{x-4}) dx.$$

*Svolgimento.*

$$\int_4^{68} \arctan(\sqrt[3]{x-4}) dx = (x-4 = t^3) = \int_0^4 \arctan(t) 3t^2 dt.$$

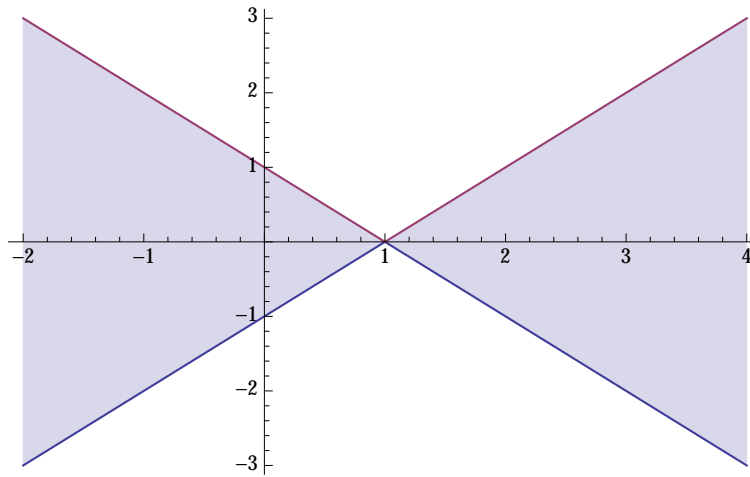


Figure 6: Esercizio 4 del Tema 3

Integro per parti

$$\begin{aligned} \int \arctan(t) 3t^2 dt &= t^3 \arctan t - \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = t^3 \arctan t - \int \frac{t^3 + t - t}{1+t^2} dt = t^3 \arctan t - \int t dt + \int \frac{t}{1+t^2} dt = \\ &= t^3 \arctan t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \log(1+t^2). \end{aligned}$$

Da cui

$$\int_4^{68} \arctan(\sqrt[3]{x-4}) dx = \left[ t^3 \arctan t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_{t=0}^{t=4} = 64 \arctan 4 - 8 + \frac{1}{2} \log 17.$$

**Esercizio 4** Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| |z-1|^2 + (z-1)^2 \right| \geq \left| |z-1|^2 - \overline{(z-1)^2} \right| \right\}.$$

*Svolgimento.* Pongo  $z = x + iy$ . Ottengo

$$\begin{aligned} \left| |z-1|^2 + (z-1)^2 \right| \geq \left| |z-1|^2 - \overline{(z-1)^2} \right| &\iff \left| (x-1)^2 + y^2 + (x-1+iy)^2 \right| \geq \left| (x-1)^2 + y^2 - (x-iy-1)^2 \right| \iff \\ \left| (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 - y^2 + 2i(x-1)y \right| &\geq \left| (x-1)^2 + y^2 - (x-1)^2 + y^2 + 2i(x-1)y \right| \iff \\ \left| 2(x-1)^2 + 2i(x-1)y \right| \geq \left| 2y^2 + 2i(x-1)y \right| &\iff |x-1| \left| (x-1) + iy \right| \geq |y| |y + i(x-1)| \end{aligned}$$

che è verificata in  $(1, 0)$  oppure in tutti i punti del piano di Gauss tali che  $|x-1| \geq |y|$ .

La regione è quella colorata in figura.

# TEMA 4

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = (|x| - 1)e^{-\frac{1}{2x+2}}.$$

- 1) Determinare il dominio e discutere il segno di  $f$ .
- 2) Calcolare i limiti significativi di  $f$  e determinarne gli asintoti.
- 3) Calcolare  $f'$  e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di  $f$ .
- 4) Calcolare i limiti significativi di  $f'$  e studiare la derivabilità di  $f$  in  $x = 0$ .
- 5) Disegnare un grafico di  $f$  (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

*Svolgimento.* **Dominio.** Per l'esistenza del quoziente, deve essere  $2 - 2x \neq 0$ , ovvero  $x \neq 1$ . Dunque  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Segno.** Si ha  $f(x) > 0$  se e solo se  $|x| - 1 > 0$ . Dunque,  $f(x) > 0$  per  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ . Inoltre  $f(x) = 0$  se e solo se  $x = -1$ .

**Limiti.** I limiti significativi sono i seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)e^{\frac{1}{2-2x}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty.$$

Con la sostituzione  $t = 1/(x - 1)$  si trova

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)e^{\frac{1}{2(1-x)}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t/2}}{t} = 0.$$

Effettivamente, nel limite precedente non c'è forma indeterminata. Analogamente, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1)e^{\frac{1}{2(1-x)}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-t/2}}{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t/2} = -\infty.$$

Abbiamo usato il Teorema di Hospital. Infine,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1)e^{\frac{1}{2-2x}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty.$$

**Asintoti.** Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo a  $+\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x} e^{\frac{1}{2(1-x)}} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{2-2x}} - 1) - e^{\frac{1}{2-2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2 - 2x}(1 + o(1)) - e^{\frac{1}{2-2x}} = -\frac{3}{2}.$$

Dunque la retta di equazione  $y = x - \frac{3}{2}$  è un asintoto obliquo a  $+\infty$ .

Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo a  $-\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 1}{x} e^{\frac{1}{2(1-x)}} = -1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - e^{\frac{1}{2-2x}}) - e^{\frac{1}{2-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2-2x}(1 + o(1)) - e^{\frac{1}{2-2x}} = -\frac{1}{2}.$$

Dunque la retta di equazione  $y = -x - \frac{1}{2}$  è un asintoto abliquo a  $-\infty$ .

La retta di equazione  $x = 1$  è un asintoto verticale sinistro a  $-\infty$ .

**Derivata.** Quando  $x = 0$  probabilmente la funzione non è derivabile a causa del valore assoluto  $|x|$ . Per  $x \neq 0$  ed  $x \neq 1$  la funzione è derivabile. La sua derivata è:

$$f'(x) = \frac{x}{|x|} e^{\frac{1}{2(x-1)}} + (|x| - 1) e^{\frac{1}{2(1-x)}} \frac{1}{2(1-x)^2} = e^{\frac{1}{2(1-x)}} \left[ \frac{x}{|x|} + \frac{1}{2} \frac{|x| - 1}{(1-x)^2} \right].$$

Quando  $x > 0$  ed  $x \neq 1$  si ha

$$\left[ \frac{x}{|x|} + \frac{1}{2} \frac{|x| - 1}{(1-x)^2} \right] = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2(1-x)^2}.$$

Quando  $x < 0$  si ha

$$\left[ \frac{x}{|x|} + \frac{1}{2} \frac{|x| - 1}{(1-x)^2} \right] = \frac{-2x^2 + 3x - 3}{2(1-x)^2}.$$

**Intervalli di monotonia.** Studiamo la disequazione  $f'(x) > 0$  separando i casi  $x > 0$  ed  $x < 0$ . Quando  $x > 0$  e  $x \neq 1$  si ha

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1/2 \text{ oppure } x > 1.$$

Dunque:

- $f$  è crescente nell'intervallo  $[0, 1/2]$ ;
- $f$  è decrescente nell'intervallo  $[1/2, 1)$ ;
- $f$  è crescente nell'intervallo  $(1, \infty)$ .

In particolare si ha  $f'(1/2) = 0$  e il punto  $x = 1/2$  è un punto di massimo locale. Il valore della funzione in questo punto è  $f(1/2) = -e/2 < -1$ .

Quando  $x < 0$  si ha

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 3 > 0 \Leftrightarrow \text{per ogni } x < 0.$$

Dunque:

- $f$  è decrescente nell'intervallo  $(-\infty, 0]$ .

Deduciamo che il punto  $x = 0$  è un punto di minimo locale (ma, attenzione,  $f'(0)$  non è definita). Il valore della funzione in questo punto è  $f(0) = -\sqrt{e} < -e/2 = f(1/2)$ .

**Limiti di  $f'$ .** Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{2(1-x)}} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2(1-x)^2} = \frac{\sqrt{e}}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{2(1-x)}} \frac{-2x^2 + 3x - 3}{2(1-x)^2} = -\frac{3\sqrt{e}}{2}.$$

I limiti destro e sinistro della derivata esistono finiti e sono diversi. Dunque  $x = 0$  è un punto di angolo. Infine, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{2(1-x)}} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2(1-x)^2} = 0.$$

L'ultimo limite si calcola ad esempio con il cambiamento di variabile  $t = 1/(1-x)$  e facendo Hospital.

**Grafico di  $f$ .** Ecco infine un grafico di  $f$  e dei suoi asintoti:

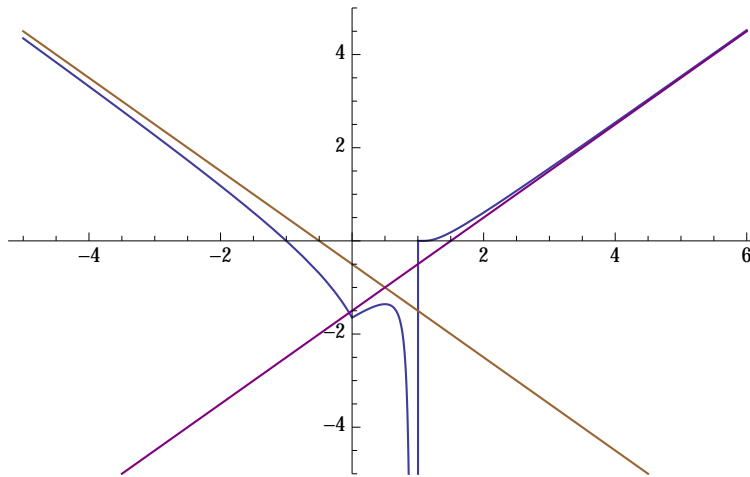


Figure 7: Il grafico di  $f$  e degli asintoti (Tema 4)

**Esercizio 2** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{n(n+1)} \frac{x^n}{5^n(x+5)^n}.$$

- 1) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza assoluta.
- 2) Studiare per quali valori di  $x \in \mathbb{R}$  c'è convergenza semplice.

*Svolgimento.* Osserviamo preliminarmente che deve essere  $x \neq -5$ , perchè altrimenti il termine generale della serie non è definito. Indichiamo il termine generale con

$$a_n = \frac{n-3}{n(n+1)} \frac{x^n}{(x+5)^n}.$$

Iniziamo a studiare la convergenza assoluta. Dobbiamo stabilire per quali  $x \neq -5$  converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n-3|}{n(n+1)} \left| \frac{x}{x+5} \right|^n.$$

Usiamo il Criterio della radice e calcoliamo il limite

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n-3}{n(n+1)} \left| \frac{x}{x+5} \right|^n} = \left| \frac{x}{x+5} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n-3}{n(n+1)}} = \left| \frac{x}{x+5} \right|.$$

Quando  $L(x) < 1$  la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente. Studiamo la disequazione (sempre per  $x \neq -5$ )

$$L(x) < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{x+5} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < |x+5| \Leftrightarrow x^2 < (x+5)^2$$

L'ultima disequazione è equivalente a  $10x+25 > 0$  ovvero  $x > -5/2$ . Per tali  $x$  c'è sia convergenza semplice che assoluta.

Quando  $x < -5/2$  si ha  $L(x) > 1$  e dunque, per il Criterio della radice, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty,$$

e di conseguenza  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  (oppure il limite non esiste). Mancando la condizione necessaria di convergenza, la serie non converge nè semplicemente nè assolutamente.

Esaminiamo il caso  $x = -5/2$ , quando  $L(x) = 1$ . In questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n(n+1)}.$$

Per confronto asintotico con la serie divergente  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$  la serie non converge assolutamente.

Proviamo che converge semplicemente con il Criterio di Leibniz. Infatti, detta  $b_n = \frac{n-3}{n(n+1)}$ , si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n(n+1)} = 0.$$

Inoltre, la successione  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è definitivamente decrescente:

$$b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow \frac{n-2}{(n+2)(n+1)} < \frac{n-3}{n(n+1)} \Leftrightarrow n(n-2) < (n-3)(n+2) \Leftrightarrow n > 6.$$

**Esercizio 3** Calcolare

$$\int_5^{130} \arctan(\sqrt[3]{x-5}) dx.$$

*Svolgimento.* Con la sostituzione  $y = \sqrt[3]{x-5}$  ovvero  $x = y^3 + 5$ , il differenziale si trasforma in questo modo:  $dx = 3y^2 dy$ . Gli estremi di integrazione vanno modificati come segue:  $x = 5 \rightarrow y = 0$  e  $x = 130 \rightarrow y = 5$ . Dunque, per il Teorema di integrazione per sostituzione, si ha

$$I = \int_5^{130} \arctan(\sqrt[3]{x-5}) dx = \int_0^5 3y^2 \arctan y dy.$$

L'ultimo integrale si calcola per parti:

$$\begin{aligned} I &= \left[ y^3 \arctan y \right]_{y=0}^{y=5} - \int_0^5 \frac{y^3}{1+y^2} dy \\ &= 125 \arctan 5 - \int_0^5 \left[ y - \frac{1}{2} \frac{2y}{1+y^2} \right] dy \\ &= 125 \arctan 5 - \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \log(1+y^2) \right]_{y=0}^{y=5} \\ &= 125 \arctan 5 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} \log 26. \end{aligned}$$

**Esercizio 4** Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| |z+1|^2 + (z+1)^2 \right| \geq \left| |z+1|^2 - \overline{(z+1)^2} \right| \right\}.$$

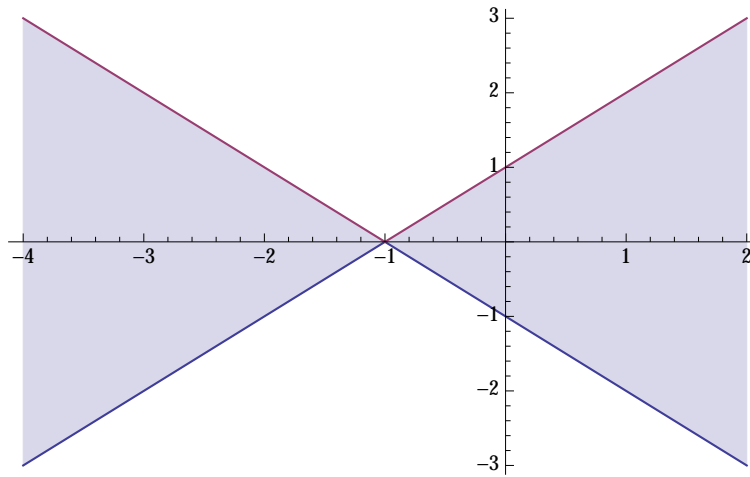


Figure 8: Esercizio 4 del Tema 3

*Svolgimento.* Dobbiamo determinare l'insieme delle  $z \in \mathbb{C}$  che risolvono la disequazione

$$||z + 1|^2 + (z + 1)^2| \geq ||z + 1|^2 - \overline{(z + 1)}^2|.$$

Usando la formula per il modulo  $|z|^2 = z\bar{z}$ , la disequazione è equivalente a

$$|(z + 1)\overline{(z + 1)} + (z + 1)^2| \geq |(z + 1)\overline{(z + 1)} - \overline{(z + 1)}^2|.$$

Raccogliendo  $z + 1$  a sinistra e  $\overline{z + 1}$  a destra, e usando il fatto che il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli, si trova la disequazione equivalente

$$|z + 1| \cdot |\overline{z + 1} + z + 1| \geq |\overline{z + 1}| \cdot |z + 1 - \overline{(z + 1)}|.$$

Osserviamo che  $|z + 1| = |\overline{z + 1}|$ . Inoltre, il numero  $z = -1$  è una soluzione (si trova infatti l'identità  $0 = 0$ ). Cerchiamo le soluzioni  $z \neq -1$ . In questo caso possiamo dividere per  $|z + 1| \neq 0$  ed ottenere la disequazione equivalente

$$|z + \bar{z} + 2| \geq |z - \bar{z}|.$$

Scrivendo  $z$  in forma algebrica  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , si ottiene infine  $|2x + 2| \geq |2iy|$ , ovvero  $|x + 1| \geq |y|$ . Il grafico della funzione  $\phi(x) = |x + 1|$  è un angolo con vertice in  $x = -1$  ed  $y = 0$ . Le soluzioni sono i punti del piano di Gauss  $x + iy \in \mathbb{C}$  tali che  $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$ .

La regione è quella colorata in figura.