ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 15.07.2014

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2 - e^x|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la derivabilità di f.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f. Calcolare i limiti significativi di f'.
4) Disegnare un grafico di f.

Svolgimento. 1) Il dominio è dato da

$$e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2 - e^x|} > 0,$$

che è equivalente a

$$e^x > |2 - e^x|.$$

Quindi se $x \geq \log 2$ abbiamo che la disequazione sopra diventa $e^x > e^x - 2$ che è verificata per ogni $x \geq \log 2$, mentre se $x < \log 2$ la disequazione diventa $e^x > 1$ cioè $x > 0$. Il dominio è quindi dato da

$$\mathcal{D} = \{x > 0\} = \mathbb{R}^+.$$

Non ci sono quindi simmetrie. Per quanto riguarda il segno abbiamo che $f > 0$ se e solo se

$$e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2 - e^x|} > 1.$$

Poiché $x > 0$ la disequazione sopra è equivalente a

$$e^x + 1 - 2e^{\frac{x}{2}} > |2 - e^x|.$$

Per $x \in (0, \log 2]$ otteniamo $2e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - 1 > 0$ e quindi, poiché $e^x > 0$, la disequazione è soddisfatta dagli $x > 0$ che soddisfano $e^{\frac{x}{2}} > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cioè

$$x \in \left(x_1 := \log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right), \log 2\right).$$

Mentre se $x \geq \log 2$ la disequazione diventa $3 - 2e^{\frac{x}{2}} > 0$, cioè

$$x \in \left[\log 2, x_2 = \log\frac{9}{4}\right).$$

Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (x_1, x_2)$.
2) I limiti notevoli sono per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. è facile vedere che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Per quanto riguarda l'altro limite sappiamo che per $x > \log 2$ si ha:

$$f(x) = \log\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-x}}\right) = \frac{x}{2} + \log\left(1 - \sqrt{1-2\mathrm{e}^{-x}}\right)$$

e quindi razionalizzando all'interno del log moltiplicando e dividendo per $1+\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-x}}$ abbiamo che

$$f(x) = \log 2 - \frac{x}{2} - \log\left(1+\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-x}}\right) \qquad \forall\, x > \log 2.$$

Da questa rappresentazione otteniamo immediatamente i seguenti limiti

$$\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x\right) = 0 \end{array}$$

e quindi $y = -\frac{x}{2}$ è asintoto obliquo a $+\infty$. La funzione è continua in $\mathcal{D}$ e derivabile in $\mathcal{D}\setminus\{\log 2\}$ (per la presenza del valore assoluto e della radice).

3) Per $x \in \mathcal{D} \setminus \{\log 2\}$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \frac{\text{segno}(2-\mathrm{e}^{x})\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{|2-\mathrm{e}^{x}|}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \sqrt{|2-\mathrm{e}^{x}|}}.$$

Poiché il denominatore è > 0, il segno di f' dipende dal numeratore. È facile vedere che per $x \in (0, \log 2)$ la funzione è strettamente monotona crescente; se $x > \log 2$ abbiamo che $f'(x) > 0$ per x che soddisfa $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}-2}} > 0$ cioè $\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}-2}} < 1$, equivalente a $\mathrm{e}^{x} - 2 > \mathrm{e}^{x}$, mai verificata e quindi per $x > \log 2$ la funzione è strettamente monotona decrescente e $\log 2$ è un punto di massimo (assoluto). Per la presenza della $\sqrt{|2-\mathrm{e}^{x}|}$ al denominatore è immediato calcolare i seguenti attacchi di f' in $\log 2$:

$$\lim_{x\to\log 2^{\pm}} f'(x) = \mp\infty,$$

e quindi $\log 2$ è un punto di cuspide.

4) Il grafico della funzione segue:

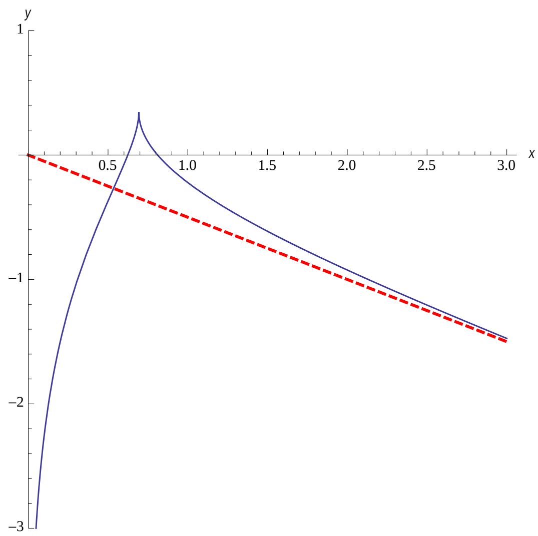

Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin(e^n)}{n^3+3\log n}(3x)^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Usiamo il criterio del rapporto per la convergenza assoluta. Calcoliamo il seguente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+\sin(e^{n+1})}{(n+1)^3+3\log(n+1)} \frac{n^3+3\log n}{n+\sin(e^n)} \left|\frac{(3x)^{n+1}}{(3x)^n}\right| = |3x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^3}{(n+1)^3 n} = |3x|$$

Quindi per $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice) per $x < -\frac{1}{3} \cup x > \frac{1}{3}$ la serie NON converge nemmeno semplicemente perché il termine generale non è infinitesimo. Per $|x| = \frac{1}{3}$ il termine n-esimo della serie è asintotico a $\frac{1}{n^2}$ e quindi anche agli estremi c'è convergenza assoluta. Ricapitolando la serie converge assolutamente per $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Esercizio 3 [9 punti] Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\left(3+2\sqrt{x}+x\right)}dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento: L'integrando è continuo in $(0, +\infty)$. In un intorno destro di zero è asintotico a $\frac{1}{3x^\alpha}$ e quindi c'è convergenza per $\alpha < 1$. Per quanto riguarda $+\infty$ l'integrando è asintotico a $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ che converge per $\alpha > 0$. Quindi l'integrale converge per $\alpha \in (0, 1)$.
Per $\alpha = \frac{1}{2}$ poniamo $\sqrt{x} = t$ e quindi per sostituzione l'integrale diventa

$$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{3+2t+t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2+2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}d\frac{t}{\sqrt{2}}$$

e quindi il nostro integrale di partenza vale

$$\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\sqrt{2}\right).$$

Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma trigonometrica le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^4}{z^4+1} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Svolgimento: Semplificando, l'equazione è equivalente alla seguente forma

$$-\frac{1}{z^4+1} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

cioè

$$z^4 = -1-\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

da cui prendendo le radici quarte complesse otteniamo le quattro soluzioni in forma trigonometrica:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Le quattro soluzioni sono in forma algebrica

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = -z_1, \quad z_4 = -z_2.$$

La rappresentazione nel piano di Gauss segue:

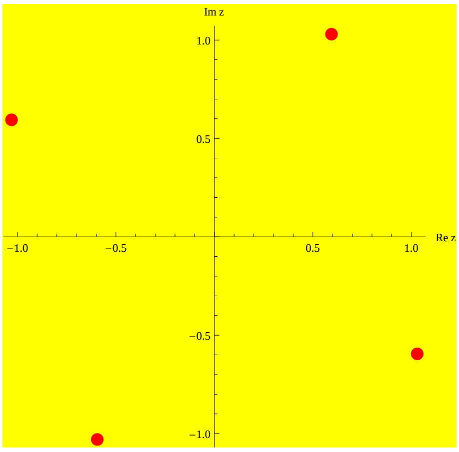

Figure 2: Soluzioni esercizio 4 (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(e^{\frac{-x}{2}} - \sqrt{|2 - e^{-x}|}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la derivabilità di f.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f. Calcolare i limiti significativi di f'.
4) Disegnare un grafico di f.

Svolgimento. 1) Il dominio è dato da tutto l'asse reale.

Non ci sono simmetrie. Per quanto riguarda il segno abbiamo che $f > 0$ se e solo se da

$$e^{\frac{-x}{2}} - \sqrt{|2 - e^{-x}|} > 0,$$

che è equivalente a

$$e^{-x} > |2 - e^{-x}|.$$

che è equivalente a

$$-e^{-x} < 2 - e^{-x} < e^{-x}.$$

Quindi se $2e^{-x} > 2$ cioè $x < 0$ la funzione è positiva.
2) I limiti notevoli sono per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$. È facile vedere che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\sqrt{2}$$

Per quanto riguarda l'altro limite sappiamo che per $x < -\log 2$ si ha:

$$f(x) = \left(e^{-\frac{x}{2}} - \sqrt{e^{-x} - 2}\right)$$

e quindi razionalizzando, moltiplicando e dividendo per $e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{e^{-x} - 2}$ abbiamo che

$$f(x) = \frac{e^{-x} - (e^{-x} - 2)}{e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{e^{-x} - 2}} = \frac{2}{e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{e^{-x} - 2}}$$

Da questa rappresentazione otteniamo immediatamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

e quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$ e $y = -\sqrt{2}$ è asintoto orizzontale a $+\infty$. La funzione è continua in $\mathcal{D}$ e derivabile in $\mathcal{D}\backslash\{-\log 2\}$ (per la presenza del valore assoluto e della radice).
3) Per $x \in \mathcal{D} \setminus \{-\log 2\}$ abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{-x/2}}{2} - \frac{e^{-x}}{2\sqrt{2-e^{-x}}}, & \text{per } -\log 2 < x < 0 \\ -\frac{e^{-x/2}}{2} + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-2}} & \text{per } x < -\log 2. \end{cases}$$

È facile vedere che per $x \in (-\log 2, 0)$ la funzione è strettamente monotona decrescente; se $x < -\log 2$ abbiamo che $f'(x) > 0$ per x che soddisfa $-e^{-\frac{x}{2}} + \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}-2}} > 0$ cioè $\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^{-x}-2}} > 1$, equivalente a $e^{-x} > e^{-x} - 2$, sempre verificata e quindi per $x < -\log 2$ la funzione è strettamente monotona crescente e $\log 2$ è un punto di massimo (assoluto). Per la presenza della $\sqrt{|2 - e^x|}$ al denominatore è immediato calcolare i seguenti attacchi di f' in $\log 2$:

$$\lim_{x \to -\log 2^{\pm}} f'(x) = \pm\infty,$$

e quindi $-\log 2$ è un punto di cuspide.
4) Il grafico della funzione segue:

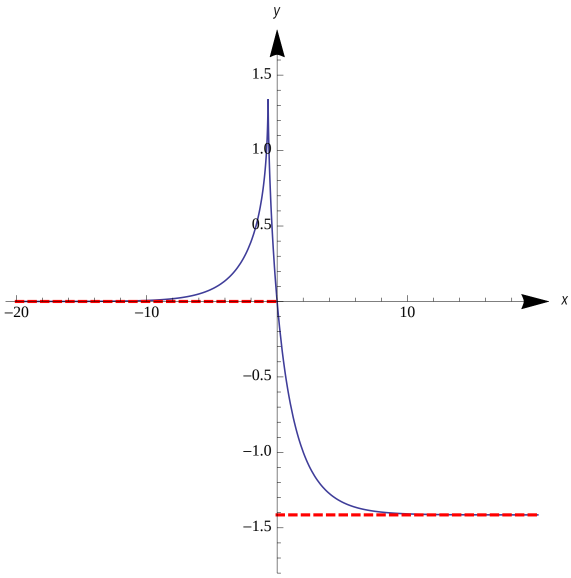

Figure 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 [9 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos(n!)}{n^3 - 2\log n} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che $n + \cos(n!) \sim n$ e $n^3 - 2\log n \sim n^3$ per $n \to \infty$, per cui

$$\frac{n + \cos(n!)}{n^3 - 2\log n} \sim \frac{1}{n^2} \qquad \text{per } n \to \infty.$$

La convergenza assoluta della serie data è pertanto equivalente a quella della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Applicando il criterio della radice o del rapporto, si ottiene la convergenza assoluta per $|x| < 2$, mentre per $x > 2$ o per $x < -2$ la serie non converge nemmeno semplicemente, in quanto il termine generale non è infinitesimo. Per $x = \pm 2$ la serie converge pure assolutamente, perché il termine generale è asintotico a $1/n^2$.

Esercizio 3 [9 punti] Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (4 + 3\sqrt{x} + x)} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Svolgimento. L'integrando è continuo in $(0, +\infty)$. In un intorno destro di zero è asintotico a $\frac{1}{3x^\alpha}$ e quindi c'è convergenza per $\alpha < 1$. Per quanto riguarda $+\infty$ l'integrando è asintotico a $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ che converge per $\alpha > 0$. Quindi l'integrale converge per $\alpha \in (0,1)$.
Per $\alpha = \frac{1}{2}$ poniamo $\sqrt{x} = t$ e quindi per sostituzione l'integrale diventa

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}\,(4 + 3\sqrt{x} + x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{4 + 3t + t^2} =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{(t + 3/2)^2 + 7/4} = \lim_{k \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan(\frac{3 + 2t}{\sqrt{7}})\Big]_0^k = \frac{4}{\sqrt{7}}(\pi/2 - \arctan 3/\sqrt{7}).$$

Esercizio 4 [5 punti] Esprimere in forma trigonometrica le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^4}{z^4 + 1} = 1 + \frac{i}{\sqrt{3}}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

e disegnarle nel piano di Gauss.
Svolgimento. Si ha

$$\frac{z^4}{z^4 + 1} = 1 - \frac{1}{z^4 + 1} = 1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{i} \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Si devone pertanto trovare le radici quarte del numero $-1 + i\sqrt{3}$. In forma trigonometrica si ha $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$. Pertanto

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi + 2K\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi + 2K\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi + K\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi + K\frac{\pi}{2}\pi\right)\right)$$

per $K = 0, 1, 2, 3$, che dà

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)$$

Le quattro soluzioni dell'equazione data sono in forma algebrica

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right), \quad z_1 = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = -z_0, \quad z_3 = -z_1.$$

La rappresentazione nel piano di Gauss segue:

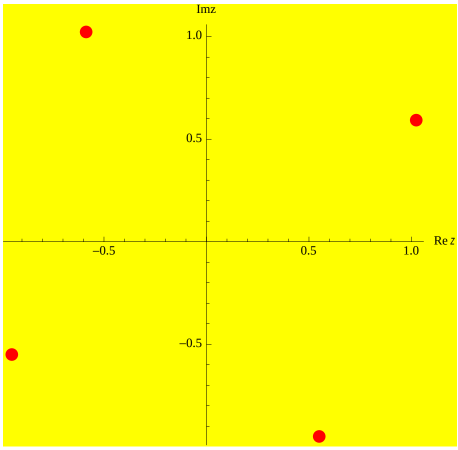

Figure 4: Soluzioni esercizio 4 (Tema 2).