# ANALISI MATEMATICA 1

**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

## Appello del 12.09.2014

# TEMA 1

**Esercizio 1 [9 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = |1 - x|\, e^{\arctan(4/x)}.$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di $f$.

2) Calcolare i limiti significativi di $f$ e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la continuità e la derivabilità di $f$.

3) Calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$. Calcolare i limiti significativi di $f'$.

4) Disegnare un grafico di $f$.

*Svolgimento.* 1) Il dominio è dato dagli $\{x \neq 0\}$. Non ci sono simmetrie e la funzione è evidentemente non negativa nel suo dominio.
2) Vediamo i limiti significativi in 0 e all'infinito:

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Possibilità di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp x = \mp(1-x)\left(1 + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \pm x = \pm 3$$

Quindi la retta $y = x + 3$ è asintoto a $+\infty$ mentre la retta $y = -x - 3$ è asintoto a $-\infty$. La funzione è continua nel suo dominio $\mathcal{D}$=$\{x \neq 0\}$ (ha una discontinuità di salto in 0) ed è derivabile in $\mathcal{D} \setminus\{1\}$ per la presenza del valore assoluto.
3) Calcoliamo $f'$ in $\mathcal{D} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\arctan(4/x)} + (1-x)e^{\arctan(4/x)}\left(\frac{4}{1+\frac{16}{x^2}}\frac{-1}{x^2}\right) = e^{\arctan(4/x)}\frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} & \text{per } x < 1 \\ -e^{\arctan(4/x)}\frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

Poiché $\frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione è strettamente monotona decrescente in $x < 1$ ed è strettamente monotona crescente per $x > 1$. Vediamo l'attacco in $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\arctan(4/x)}\frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} = -e^{\arctan 4}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -e^{\arctan(4/x)}\frac{-x^2+4x-20}{x^2+16} = e^{\arctan 4}.$$

Perció $x = 1$ è un punto angoloso di minimo assoluto. Non ci sono altri punti di min o max relativo.
4) Il grafico della funzione segue:

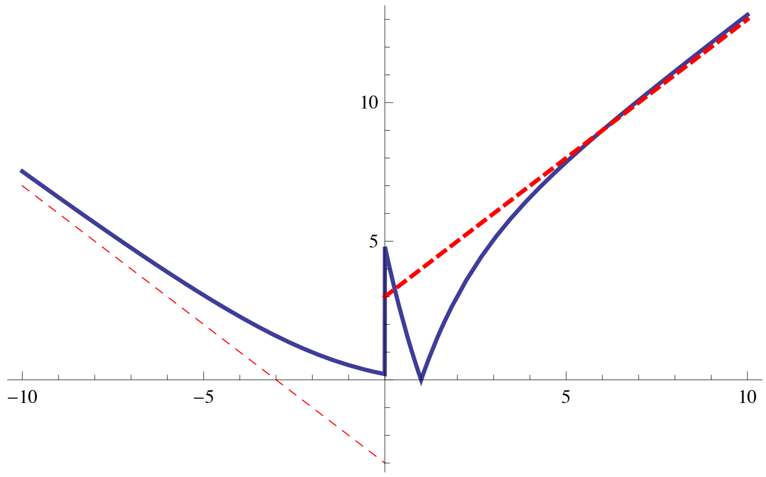


Figure 1: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 2 [9 punti]** Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha + 1 - \cosh x}{\sqrt{2+x^\alpha} - \sqrt{2-x^\alpha}}.$$

*Svolgimento.* Usando gli sviluppi asintotici e razionalizzando

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^\alpha) - x^\alpha + 1 - \cosh x}{\sqrt{2+x^\alpha} - \sqrt{2-x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^{3\alpha}}{3!} + o(x^{3\alpha}) - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^\alpha} \big(\sqrt{2+x^\alpha} + \sqrt{2-x^\alpha}\big) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \Big( -\frac{x^{2\alpha}}{12} + o(x^{2\alpha}) - \frac{1}{4} x^{2-\alpha} + o(x^{2-\alpha}) \Big) \big(\sqrt{2+x^\alpha} + \sqrt{2-x^\alpha}\big) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

**Esercizio 3 [9 punti]** Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha} dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

*Svolgimento.* L'integrando è continuo in $[0, 4)$ e, per $x \to 4^-$, è infinito di ordine $\alpha$. Di conseguenza l'integrale è convergente per $\alpha < 1$.

Si ha

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha} dx = 2\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}} dt = 2\Big[ -\int_0^2 \sqrt{4-t^2}\, dt + 4\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} dt \Big]$$

$$= 2\Big[ -4\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, du + 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \Big]$$

$$= 8\Big[ -\int_0^{\pi/2} \cos^2 v\, dv + \arcsin u\big|_0^1 \Big] = 8\big[ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \big] = 2\pi.$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Determinare il numero complesso $\alpha$ tale che il polinomio

$$P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (7+5i)z + \alpha$$

abbia $z_1 = 2$ come radice. Per tale valore di $\alpha$ trovare le altre due radici di $P(z)$ esprimendole in forma algebrica.

*Svolgimento.* Imponendo che $z = 2$ sia radice si ottiene

$$8 - 4(6+2i) + (7+5i)2 + \alpha = 0$$

da cui $\alpha = 2 - 2i$. Dividendo il polinomio per $z - 2$ si ha

$$P(z) = (z-2)(z^2 - (4+2i)z - 1 + i)$$

e quindi si deve risolvere $z^2 - (4+2i)z - 1 + i = 0$. Si ottiene $z = 2 + i + \sqrt{4+3i}$. Le due radici di $4+3i$ si trovano imponendo che $(a+ib)^2 = 4+3i$ il che comporta

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 3 \end{cases}$$

che dà le soluzioni $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Alternativamente, si possono calcolare le radici quadrate di $4+3i$ usando le formule di bisezione: $|4+3i|^2 = 16 + 9 = 25$, da cui

$$4 + 3i = 5\Big(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\Big) = 5\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big).$$

Le radici quadrate di $4 - 3i$ sono perciò

$$\pm\sqrt{5}\big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\big) = \pm\Big(\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Le altre due radici di $P(z)$ sono perciò

$$z_{1,2} = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} + i\Big(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

# TEMA 2

**Esercizio 1 [9 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = |1+x|\, e^{-\arctan(2/x)}.$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di $f$.

2) Calcolare i limiti significativi di $f$ e determinarne gli eventuali asintoti. Studiare la continuità e la derivabilità di $f$.

3) Calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$. Calcolare i limiti significativi di $f'$.

4) Disegnare un grafico di $f$.

*Svolgimento.* 1) Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Non ci sono simmetrie. Per quanto riguarda il segno abbiamo che $f > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2) I limiti notevoli sono per $x \to 0^+$ e per $x \to \pm\infty$. È facile vedere che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{\frac{\pi}{2}},$$

per cui $f$ ha in 0 una discontinuità di salto, mentre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1$, e inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{t\to 0^+} \left(1+\frac{1}{t}\right) e^{-\arctan 2t} - \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left(1+\frac{1}{t}\right) \big(1 - \arctan 2t + o(\arctan 2t)\big) - \frac{1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left(1+\frac{1}{t}\right) \big(1 - 2t + o(t)\big) - \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1 + \frac{1}{t} - 2t - 2 - \frac{1}{t} + o(1) = -1.\end{aligned}$$

Quindi $y = x - 1$ è asintoto obliquo destro.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) + x &= \lim_{t\to 0^-} \left(-1-\frac{1}{t}\right) e^{-\arctan 2t} + \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0^-} \left(-1-\frac{1}{t}\right) \big(1 - 2t + o(t)\big) + \frac{1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^-} -1 - \frac{1}{t} + 2t + 2 + \frac{1}{t} + o(1) = 1\end{aligned}$$

e $y = -x + 1$ è asintoto obliquo sinistro.
3) Per $x \in \mathcal{D} \setminus \{1\}$ la funzione è derivabile e abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\arctan(2/x)} + (1+x)e^{-\arctan(2/x)} \left(\frac{2}{1+\frac{4}{x^2}} \frac{1}{x^2}\right) = e^{-\arctan(2/x)} \frac{x^2+2x+6}{x^2+4} & \text{per } x > -1 \\ -e^{-\arctan(2/x)} \frac{x^2+2x+6}{x^2+4} & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

Poichè $\frac{x^2+2x+6}{x^2+1} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x)$ è crescente per $-1 < x < 0$ e $x > 0$ mentre è decrescente per $x < -1$. Pertanto $x = -1$ è punto di minimo (assoluto) per $f$ e $f(-1) = 0$.
Per gli attacchi:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{3}{2} e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{3}{2} e^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = e^{\arctan 2}, \quad \lim_{x\to -1^-} f'(x) = -e^{\arctan 2}.$$

4) Il grafico della funzione segue:

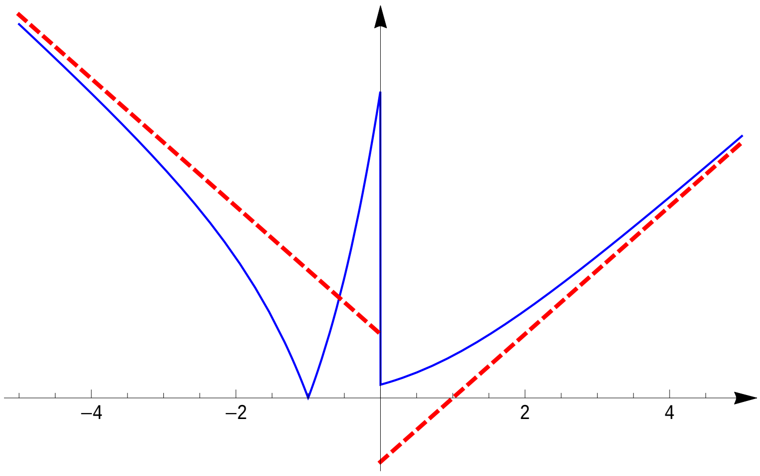


Figure 2: Il grafico di $f$ (Tema 2).

**Esercizio 2 [9 punti]** Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^\alpha)+\sinh x}{\sqrt{3+x^\alpha}-\sqrt{3-x^\alpha}}.$$

*Svolgimento.* Usando gli sviluppi asintotici e razionalizzando

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^\alpha)+\sinh x}{\sqrt{3+x^\alpha}-\sqrt{3-x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^{2\alpha}}{2}+o(x^{2\alpha})+x+o(x)}{2x^\alpha}(\sqrt{3+x^\alpha}+\sqrt{3-x^\alpha}) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\frac{x^\alpha}{4}+o(x^\alpha)+\frac{1}{2}x^{1-\alpha}+o(x^{1-\alpha}))(\sqrt{3+x^\alpha}+\sqrt{3-x^\alpha}) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 0<\alpha<1 \\ \sqrt{3} & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1. \end{cases}$$

**Esercizio 3 [9 punti]** Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{(9-x)^\alpha}dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.
*Svolgimento.* L'integrando è continuo in $[0,9)$ e, per $x \to 9^-$, è infinito di ordine $\alpha$. Di conseguenza l'integrale è convergente per $\alpha < 1$.
Si ha

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{(9-x)^\alpha}\,dx = 2\int_0^3 \frac{t^2}{\sqrt{9-t^2}}\,dt = 2\left[-t\sqrt{9-t^2}|_0^3+\int_0^3\sqrt{9-t^2}\,dt\right]$$
$$= 2\int_0^3 \sqrt{9-t^2}\,dt = \frac{9}{2}\pi.$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Determinare il numero complesso $\alpha$ tale che il polinomio

$$P(z) = z^3 - (7 + 2i)z^2 + (11 + 7i)z + \alpha$$

abbia $z_1 = 3$ come radice. Per tale valore di $\alpha$ trovare le altre due radici di $P(z)$ esprimendole in forma algebrica.
*Svolgimento.* Imponendo che $z = 3$ sia radice si ottiene

$$27 - 9(7 + 2i) + (11 + 7i)3 + \alpha = 0$$

da cui $\alpha = 3 - 3i$. Dividendo il polinomio per $z = 3$ si ha

$$P(z) = (z - 3)(z^2 - (4 + 2i)z - 1 + i)$$

e quindi si deve risolvere $z^2 - (4 + 2i)z - 1 + i = 0$. Si ottiene $z = 2 + i + \sqrt{4 + 3i}$. Le due radici di $4 + 3i$ si trovano imponendo che $(a + ib)^2 = 4 + 3i$ il che comporta

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 3 \end{cases}$$

che dà le soluzioni $\pm \left( \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.