

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4

Appello del 26.01.2015

TEMA 1

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x + 1| e^{\frac{-1}{|x+3|}}.$$

- (a) Determinare il dominio D di f ; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f' ;
(c) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= 0, \end{aligned}$$

per cui f è prolungabile ad una funzione continua in tutto \mathbb{R} ponendo $f(-3) = 0$.

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^{\frac{-1}{x+3}}}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x-1)e^{\frac{1}{x+3}}}{x} = -1. \end{aligned}$$

Per i termini noti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x(e^{\frac{-1}{x+3}} - 1) + e^{\frac{-1}{x+3}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x}{x+3} + o(1) + e^{\frac{-1}{x+3}} \right] \\ &= -1 + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x(e^{\frac{1}{x+3}} - 1) - e^{\frac{1}{x+3}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x}{x+3} + o(1) - e^{\frac{1}{x+3}} \right] \\ &= -2, \end{aligned}$$

per cui $y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e $y = -x - 2$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

(b) Si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq -1, -3$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{\frac{-1}{x+3}} & \text{per } x > -1 \\ (-x-1)e^{\frac{-1}{x+3}} & \text{per } -3 < x < -1 \\ (-x-1)e^{\frac{1}{x+3}} & \text{per } x < -3, \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x+3}} \left(1 + \frac{x+1}{(x+3)^2} \right) = e^{\frac{-1}{x+3}} \frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} & \text{per } x > -1 \\ e^{\frac{-1}{x+3}} \left(-1 + \frac{-x-1}{(x+3)^2} \right) = -e^{\frac{-1}{x+3}} \frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} & \text{per } -3 < x < -1 \\ e^{\frac{1}{x+3}} \left(-1 - \frac{-x-1}{(x+3)^2} \right) = -e^{\frac{1}{x+3}} \frac{x^2+5x+8}{(x+3)^2} & \text{per } x < -3. \end{cases}$$

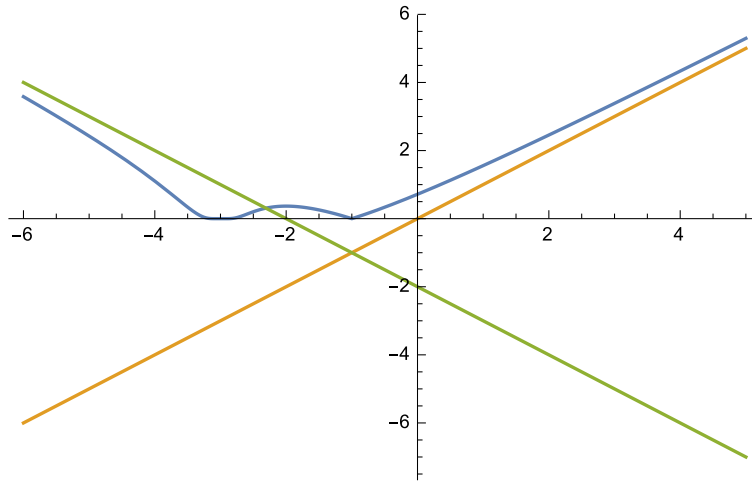


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Gli zeri di $x^2 + 7x + 10$ sono -5 e -2 , mentre $x^2 + 5x + 8$ non ha zeri. Quindi f è strettamente decrescente per $x < -3$, è strettamente crescente per $-3 < x < -2$, è strettamente decrescente per $-2 < x < -1$ ed è strettamente crescente per $x > -1$. In particolare $-3, -1$ sono i punti di minimo assoluto (ovvio, perché $f(x) \geq 0$ per ogni x) e $x = -2$ è un massimo locale stretto, con $f(-2) = 1/e$.

I limiti significativi di f' sono

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f'(x) &= 0 && \text{(dal limite fondamentale } \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} / x^2 = 0) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) &= -e^{-1/2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) &= e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dunque l'estensione continua di f è derivabile in $x = -3$, mentre $x = -1$ è un punto angoloso.

(c) Il grafico di f è in Figura 1.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n-1} (x-2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento. Il criterio asintotico del rapporto dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} \frac{n-1}{\log n} |x-2| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n} \frac{n-1}{n} |x-2| = |x-2|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x-2| < 1$, cioè se $1 < x < 3$, mentre il termine generale non è infinitesimo per $x < 1$ o per $x > 3$ e quindi per tali x la serie diverge assolutamente e non converge. Per $x = 1, 3$ il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni.

Per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n-1},$$

che è a termini di segno alterno. Poniamo $a_n = \frac{\log n}{n-1}$ e $f(x) = \frac{\log x}{x-1}$. Per un limite fondamentale si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Inoltre $f'(x) = \frac{1-1/x-\log x}{(x-1)^2}$, che è visibilmente < 0 per $x > 2$. Per il teorema di Leibniz, la

serie converge. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, osserviamo che per $x = 1$ e per $x = 3$ questa significa la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Siccome $a_n \geq 1/(n-1)$ per ogni $n \geq 2$ e la serie armonica diverge, per il criterio del confronto la serie diverge.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x + 3)e^{2\cos x} |\sin x| dx.$$

Svolgimento. L'integrando è una funzione pari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico, per cui si ha

$$I := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x + 3)e^{2\cos x} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + 3)e^{2\cos x} \sin x dx.$$

Calcoliamo separatamente due primitive. Si ha:

$$\begin{aligned} \int e^{2\cos x} \sin x dx &= -\frac{1}{2}e^{2\cos x} =: F_1(x) \\ \int e^{2\cos x} \sin^3 x dx &= (\text{per parti}) -\frac{1}{2}e^{2\cos x} \sin^2 x + \int e^{2\cos x} \sin x \cos x dx \\ &= (\text{ancora per parti}) -\frac{1}{2}e^{2\cos x} \sin^2 x - \frac{1}{2}e^{2\cos x} \cos x - \frac{1}{2} \int e^{2\cos x} \sin x dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{2\cos x} \sin^2 x - \frac{1}{2}e^{2\cos x} \cos x + \frac{1}{4}e^{2\cos x} \\ &= \frac{1}{4}e^{2\cos x} (1 - 2\cos x - 2\sin^2 x) =: F_2(x). \end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2(3F_1(x) + F_2(x))\Big|_0^{\pi/2} = \frac{7}{2}(e^2 - 1).$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = i\bar{z}^3 - 3 + i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$\begin{aligned} A &= \{f(z) : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{C} : f(z) = i - 11\}. \end{aligned}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned} A &= \{i(\bar{iy})^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\} = \{i(-\bar{iy}^3) - 3 + i : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{i y^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\} = \{-y^3 - 3 + i : y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

L'insieme A è quindi una retta parallela all'asse delle ascisse $\operatorname{Im} z = 1$.

Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} B &= \{z : i\bar{z}^3 - 3 + i = i - 11\} = \{z : \bar{z}^3 = 8i\} \\ &= \{z : z^3 = -8i\} = \{z : z^3 = 8e^{3\pi i/2}\} \\ &= \{2e^{i\pi/2}, 2e^{7\pi i/6}, 2e^{11\pi i/6}\} = \{2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f .

Svolgimento. Per il teorema della media integrale, per ogni x esiste $t_x \in [x^2, 2x^2]$ tale che $f(x) = x^2 \frac{e^{t_x} - 1}{t_x}$. Siccome $t_x \rightarrow 0$, per il teorema sul cambio di variabili nei limiti si ha che $\frac{e^{t_x} - 1}{t_x} \rightarrow 1$. Quindi $f(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = -|x - 3| e^{\frac{-1}{|x-1|}}.$$

- (a) Determinare il dominio D di f ; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
 (b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f' ;
 (c) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 0, \end{aligned}$$

per cui f è prolungabile ad una funzione continua in tutto \mathbb{R} ponendo $f(1) = 0$.
 Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-x)e^{\frac{-1}{x-1}}}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-3)e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = 1. \end{aligned}$$

Per i termini noti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x(e^{\frac{-1}{x-1}} - 1) + 3e^{\frac{-1}{x-1}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x-1} + o(1) + 3e^{\frac{-1}{x-1}} \right] \\ &= 1 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x(e^{\frac{1}{x-1}} - 1) - 3e^{\frac{1}{x-1}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{x-1} + o(1) - 3e^{\frac{1}{x-1}} \right] \\ &= -2, \end{aligned}$$

per cui $y = -x + 4$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e $y = x - 2$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

(b) Si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq 1, 3$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (3-x)e^{\frac{-1}{x-1}} & \text{per } x > 3 \\ (x-3)e^{\frac{-1}{x-1}} & \text{per } 1 < x < 3 \\ (x-3)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{per } x < 1, \end{cases}$$

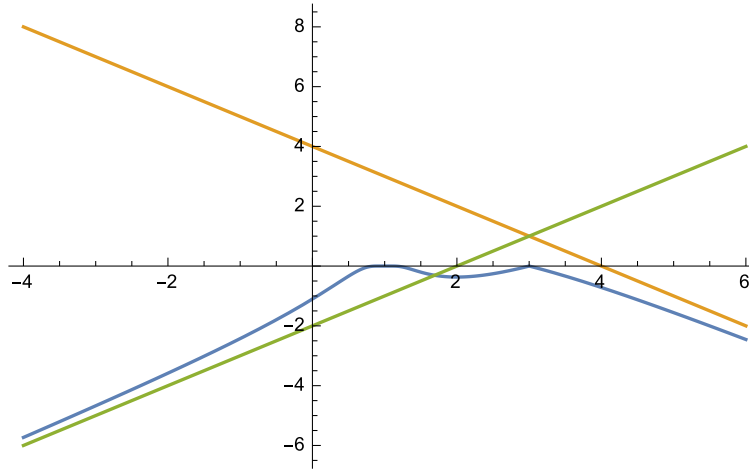


Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x-1}} \left(-1 + \frac{3-x}{(x-1)^2} \right) = e^{\frac{-1}{x-1}} \frac{-x^2+x+2}{(x-1)^2} & \text{per } x > 3 \\ e^{\frac{-1}{x-1}} \left(1 + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right) = -e^{\frac{-1}{x-1}} \frac{-x^2+x+2}{(x-1)^2} & \text{per } 1 < x < 3 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x-3}{(x-1)^2} \right) = e^{\frac{1}{x-1}} \frac{x^2-3x+4}{(x-1)^2} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

Gli zeri di $-x^2 + x + 2$ sono -1 e 2 , mentre $x^2 - 3x + 4$ non ha zeri. Quindi f è strettamente crescente per $x < 1$, è strettamente decrescente per $1 < x < 2$, è strettamente crescente per $2 < x < 3$ ed è strettamente decrescente per $x > 3$. In particolare $1, 3$ sono i punti di massimo assoluto (ovvio, perché $f(x) \leq 0$ per ogni x) e $x = 2$ è un minimo locale stretto, con $f(2) = 1/e$.

I limiti significativi di f' sono

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) &= 0 \quad (\text{dal limite fondamentale } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^2} = 0) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) &= e^{-1/2} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) &= -e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dunque l'estensione continua di f è derivabile in $x = 1$, mentre $x = 3$ è un punto angoloso.

(c) Il grafico di f è in Figura 2.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \log n}{n} (x+1)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento. Il criterio asintotico del rapporto dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \log(n+1)}{n+1} \frac{n-1}{1 + \log n} |x+1| = |x+1|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x+1| < 1$, cioè se $-2 < x < 0$, mentre il termine generale non è infinitesimo per $x < -2$ o per $x > 0$ e quindi per tali x la serie diverge assolutamente

e non converge. Per $x = -2, 0$ il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni. Per $x = -2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \log n}{n},$$

che è a termini di segno alterno. Poniamo $a_n = \frac{1 + \log n}{n}$ e $f(x) = \frac{1 + \log x}{x}$. Per un limite fondamentale si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Inoltre $f'(x) = \frac{1 - x - x \log x}{x^2}$, che è visibilmente < 0 per $x > 2$. Per il teorema di Leibniz, la serie converge. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, osserviamo che per $x = 2$ e per $x = 0$ questa significa la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Siccome $a_n \geq 1/n$ per ogni $n \geq 2$ e la serie armonica diverge, per il criterio del confronto la serie diverge.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + 1) e^{3|\sin x|} \cos x \, dx.$$

Svolgimento. L'integrando è una funzione pari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico, per cui si ha

$$I := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + 1) e^{3|\sin x|} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + 1) e^{3 \sin x} \cos x \, dx.$$

Calcoliamo separatamente due primitive. Si ha:

$$\begin{aligned} \int e^{3 \sin x} \cos x \, dx &= \frac{1}{3} e^{3 \sin x} =: F_1(x) \\ \int e^{3 \sin x} \cos^3 x \, dx &= (\text{per parti}) \frac{1}{3} e^{3 \sin x} \cos^2 x + \frac{2}{3} \int e^{3 \sin x} \cos x \sin x \, dx \\ &= (\text{ancora per parti}) \frac{1}{3} e^{3 \sin x} \cos^2 x + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3 \sin x} \sin x - \frac{1}{3} \int e^{3 \sin x} \cos x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{3} e^{3 \sin x} \cos^2 x + \frac{2}{9} e^{3 \sin x} \sin x - \frac{2}{27} e^{3 \sin x} \\ &= \frac{1}{27} e^{3 \sin x} (-2 + 6 \sin x + 9 \cos^2 x) =: F_2(x). \end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2(F_1(x) + F_2(x)) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{27} (4e^3 - 7).$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = i\bar{z}^3 + 1 - 2i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$\begin{aligned} A &= \{f(z) : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) = 0\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 9 - 2i\}. \end{aligned}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned} A &= \{i\bar{x}^3 + 1 - 2i : x \in \mathbb{R}\} = \{ix^3 + 1 - 2i : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{1 + i(x^3 - 2) : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

L'insieme A è quindi una retta parallela all'asse delle ordinate $\operatorname{Re} z = 1$.
Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} B &= \{z : i\bar{z}^3 + 1 - 2i = 9 - 2i\} = \{z : \bar{z}^3 = -8i\} \\ &= \{z : z^3 = 8i\} = \{z : z^3 = 8e^{i\pi/2}\} \\ &= \{2e^{i\pi/6}, 2e^{5\pi i/6}, 2e^{3\pi i/2}\} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f .

Svolgimento. V. Tema 1.

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = |x + 3| e^{\frac{-1}{|x+1|}}.$$

- (a) Determinare il dominio D di f ; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f' ;
(c) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento.

- (a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= 0, \end{aligned}$$

per cui f è prolungabile ad una funzione continua in tutto \mathbb{R} ponendo $f(-1) = 0$.

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)e^{\frac{-1}{x+1}}}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x-3)e^{\frac{1}{x+1}}}{x} = -1. \end{aligned}$$

Per i termini noti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x(e^{\frac{-1}{x+1}} - 1) + 3e^{\frac{-1}{x+1}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x}{x+1} + o(1) + 3e^{\frac{-1}{x+1}} \right] \\ &= -1 + 3 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x(e^{\frac{1}{x+1}} - 1) - 3e^{\frac{1}{x+1}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x}{x+1} + o(1) - 3e^{\frac{1}{x+1}} \right] \\ &= -4, \end{aligned}$$

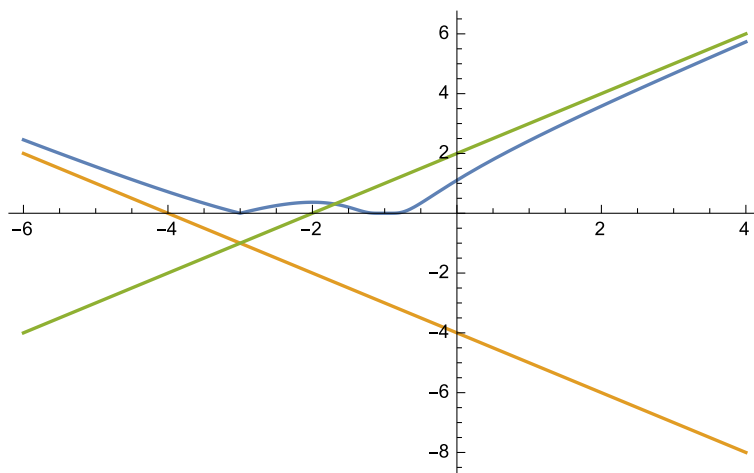


Figura 3: Il grafico di f (Tema 3).

per cui $y = x + 2$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e $y = -x - 4$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

(b) Si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq -1, -3$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)e^{\frac{-1}{x+1}} & \text{per } x \geq -1 \\ (x+3)e^{\frac{1}{x+1}} & \text{per } -3 < x < -1 \\ (-x-3)e^{\frac{1}{x+1}} & \text{per } x \leq -3, \end{cases}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x+1}} \left(1 + \frac{x+3}{(x+1)^2}\right) & \text{per } x > -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} \left(1 - \frac{x+3}{(x+1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x+1}} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} & \text{per } -3 < x < -1 \\ e^{\frac{1}{x+1}} \left(-1 - \frac{-x-3}{(x+1)^2}\right) & \text{per } x < -3. \end{cases}$$

Si noti che $f'(x)$ è ovviamente positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -3$. Gli zeri di $x^2 + x - 2$ sono 1 e -2. Quindi f è strettamente decrescente per $x < -3$, è strettamente crescente per $-3 < x < -2$, è strettamente decrescente per $-2 < x < -1$ ed è strettamente crescente per $x > -1$. In particolare -3, -1 sono i punti di minimo assoluto (ovvio, perché $f(x) \geq 0$ per ogni x) e $x = -2$ è un massimo locale stretto, con $f(-2) = 1/e$.

I limiti significativi di f' sono

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) &= 0 && \text{(dal limite fondamentale } \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}/x^2 = 0) \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) &= -e^{-1/2} \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) &= e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Dunque l'estensione continua di f è derivabile in $x = -1$, mentre $x = -3$ è un punto angoloso.

(c) Il grafico di f è in Figura 3.

Esercizio 2 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1 - \log n}{2 - n} (x+2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Svolgimento. Si noti che $\frac{1-\log n}{2-n} = \frac{\log n-1}{n-2} > 0$ per $n \geq 3$ Il criterio asintotico del rapporto dà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)-1}{(n+1)-2} \frac{n-2}{\log n-1} |x+2| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)-1}{\log n-1} \frac{n-2}{n-1} |x+2| = |x+2|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, e quindi converge, se $|x+2| < 1$, cioè se $-3 < x < -1$, mentre il termine generale non è infinitesimo per $x < -3$ o per $x > -1$ e quindi per tali x la serie diverge assolutamente e non converge. Per $x = -3, -1$ il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni.

Per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-\log n}{2-n}.$$

Siccome $\frac{\log n-1}{n-2} \geq 1/(n-2)$ per ogni $n \geq 3$ e la serie armonica diverge, per il criterio del confronto la serie diverge. Per $x = -3$ la serie diventa

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1-\log n}{2-n} (-1)^n,$$

che è a termini di segno alterno. Poniamo $a_n = \frac{\log n-1}{n-2}$ e $f(x) = \frac{\log x-1}{x-2}$. Per un limite fondamentale si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Inoltre $f'(x) = \frac{2-2/x-\log x}{(x-2)^2}$, che è visibilmente < 0 per $x > 9$. Per il teorema di Leibniz, la serie converge. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, la serie diventa come nel caso $x = -1$ e quindi diverge assolutamente.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - \sin^2 x) e^{-\cos x} |\sin x| dx.$$

Svolgimento.

L'integrando è una funzione pari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico, per cui si ha

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - \sin^2 x) e^{-\cos x} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi/2} (2 - \sin^2 x) e^{-\cos x} \sin x dx.$$

Inoltre poichè $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ si ha:

$$2 \int_0^{\pi/2} (2 - \sin^2 x) e^{-\cos x} \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 x) e^{-\cos x} \sin x dx.$$

Ponendo $y = -\cos x$, ($dy = \sin x dx$), l'integrale diventa:

$$2 \int_{-1}^0 (1 + y^2) e^y dy.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int (1 + y^2) e^y dy &= (\text{per parti}) (1 + y^2) e^y - \int 2y e^y dy = \\ &(\text{per parti}) (1 + y^2) e^y - 2y e^y + \int 2e^y dy = (1 + y^2 - 2y + 2) e^y + \text{cost.} \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$2 \int_{-1}^0 (1 + y^2) e^y dy = (3 + y^2 - 2y) e^y \Big|_{-1}^0 = 6 \left(1 - \frac{2}{e} \right).$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(z) = i + 2 - i\bar{z}^3, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{f(z) : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = i - 6\}.$$

Svolgimento. Sia $z = iy$ ($\operatorname{Re}(z) = 0$), si ha:

$$A = \{i + 2 - i(-iy)^3 : y \in \mathbb{R}\} = \{i + 2 + y^3 : y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(2 + y^3) + i : y \in \mathbb{R}\}.$$

L'insieme A è quindi la retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto i .
Si ha inoltre:

$$B = \{z : i + 2 - i\bar{z}^3 = i - 6\} = \{z : \bar{z}^3 = -8i\}$$
$$= \{z : z^3 = 8i\} = \{z : z^3 = 8e^{i\pi/2}\}$$
$$= \{2e^{i\pi/6}, 2e^{5\pi i/6}, 2e^{3\pi i/2}\} = \{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f .

Svolgimento. V. Tema 1.

TEMA 4

Svolgimento. V. fogli scannerizzati.

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4
Appello del 26.01.2015

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = -|x - 3| e^{\frac{-1}{|x+3|}}.$$

- (a) Determinare il dominio D di f ; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
- (b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f' ;
- (c) disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n+2} (x-1)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - \cos^2 x) e^{-2|\sin x|} \cos x \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = 3i + 2 - i\bar{z}^3, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{f(z) \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) = 0\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 29 + 3i\}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f .

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

ES 1 $f(x) = -|x-3| e^{-\frac{1}{|x+3|}}$

- Dominio: $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
- Segno: $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in D(f)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$
- Limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = [-e^{-\infty}] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = [-\infty \cdot e^0] = -\infty$$

- Asintoti:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{(x-3)}{x} e^{-\frac{1}{x+3}} = -1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} -(x-3) e^{-\frac{1}{x+3}} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - e^{-\frac{1}{x+3}}\right) + 3 e^{-\frac{1}{x+3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - 1 + \frac{1}{x+3} + o\left(\frac{1}{x+3}\right)\right) + 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} + o(1)\right) + 3 = 1 + 3 = 4$$

$y = -x + 4$ Asintoto a $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x} e^{-\frac{1}{|x+3|}} = 1$$

$$\begin{aligned}
 g &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3) e^{-\frac{1}{-x-3}} - x \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1 \right) - 3 e^{\frac{1}{x+3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x+3} + o\left(\frac{1}{x+3}\right) - 1 \right) - 3 \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+3} + o\left(\frac{x}{x+3}\right) - 3 = 1 - 3 = -2
 \end{aligned}$$

$$y = x - 2 \quad \text{Asintoto a } -\infty$$

• Continuità: f continua nel dominio $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
 ponendo $f(-3) := 0$ si prolunga f con
 continuità su tutto \mathbb{R}

• Derivabilità: f derivabile nel dominio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
 tranne che nel punto $x = 3$ probabile angolo

• Derivata:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{x-3}{|x-3|} e^{-\frac{1}{|x+3|}} - |x-3| e^{-\frac{1}{|x+3|}} \cdot (-1) \frac{(-1)}{|x+3|^2} \frac{x+3}{|x+3|} \\
 &= -|x-3| e^{-\frac{1}{|x+3|}} \left\{ \frac{1}{x-3} + \frac{x+3}{|x+3|^3} \right\}
 \end{aligned}$$

$$x \neq \pm 3$$

• Monotonia:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{x+3}{|x+3|^3} \leq 0$$

1° caso: $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x+3)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+3+x-3}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+7x+6}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

Studio $x^2+7x+6 \geq 0$, Radici $x_{\pm} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$
 $= \begin{cases} -1 \\ -6 \end{cases}$

Tabella:

	-3	-1	3	
	x		x	
x^2+7x+6	---	+++	+++	
$x-3$	---	---	+++	
$\frac{x^2+7x+6}{(x-3)(x+3)^2}$	+++	---	+++	
$f'(x)$	x	o	x	---
f	↓	↑	↓	

dunque $x = -1$ p.to min. locale
 $x = 3$ p.to max. locale ed in effetti ampiezza

2° caso: $x < -3$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{x+3}{(x+3)^3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+9 - x+3}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+12}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

Studio $x^2+5x+12 \geq 0$; $\Delta < 0 \Rightarrow$ sempre verificata

Ma

$(x \neq -3)$

$$f'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x < -3$$

Ma f cresce su $(-\infty, -3)$.

Dopo prolungamento: $x = -3$ p.to max assoluto.

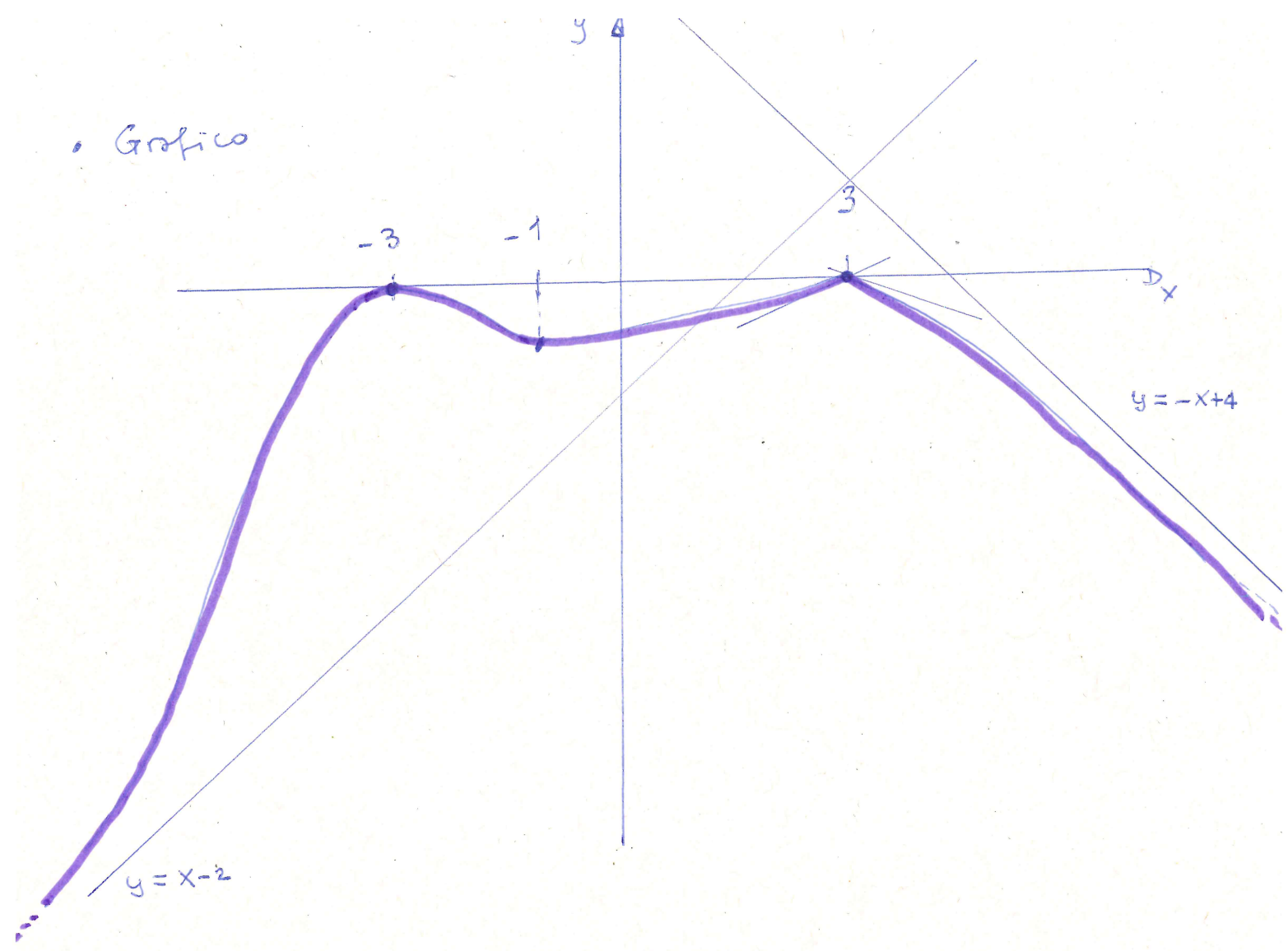
• Limiti $f'(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f'(x) = \mp e^{-1/6} \quad x=3 \text{ p.to di angolatura}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f'(x) = \dots = 0$$

Dopo prolungamento: f derivabile in $x = -3$ con $f'(-3) = 0$

• Grafico



ES 2 $x \in \mathbb{R}$ trovare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg(n+1)}{n+2} (x-1)^n$

Convergenza assoluta e stretta.

Sol. (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg(n+1)}{n+2} |x-1|^n$

Chit. Raggio

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\lg(n+1)}{n+2} |x-1|^n}$$

$$= |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\lg(n+1)}}{\sqrt[n]{n+2}} = |x-1|$$

Lim. noti

1° caso $|x-1| < 1 \Rightarrow$ CA \Rightarrow CS

2° caso $|x-1| > 1 \Rightarrow$ NO CA e termine generale non sufficientemente

\Rightarrow NO CS

$|x-1| = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow x=0$ opp $x=2$

• $x=2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg(n+1)}{n+2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg 2}{n+2} = \infty$

• $x=0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lg(n+1)}{n+2}$, NO CA

CS: Leibniz

□ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n+1)}{n+2} = 0$ NOTO $f(x) = \frac{\lg(x+1)}{x+2}$

□ $f'(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \lg(x+1) \left(-\frac{1}{(x+2)^2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

Analisi: $f' = \frac{1}{(x+2)^2} \left(\frac{x+2}{x+1} - \lg(x+1) \right) < 0$ definit.

ES. 3

Integrale:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 - \cos^2 x) e^{-2|\sin x|} \cos x \, dx$$

Sostituzione: $\sin x = t$, $dt = \cos x \, dx$

$$x = -\pi/2 \rightarrow t = -1$$

$$x = \pi/2 \rightarrow t = 1$$

Inoltre $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$

$$I = \int_{-1}^1 (2 - 1 + t^2) e^{-2|t|} \, dt$$

$$= \int_{-1}^1 (1 + t^2) e^{-2|t|} \, dt \quad \text{simmetria}$$

Ricordare

$$= 2 \int_0^1 (1 + t^2) e^{-2t} \, dt$$

Checo primitiva per parti con integrali indefiniti:

$$\bullet \int e^{-2t} \, dt = -\frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$\bullet \int t^2 e^{-2t} \, dt = t^2 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t} - \int 2t \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t} \, dt =$$

$$= -\frac{t^2}{2} e^{-2t} + \int t e^{-2t} \, dt$$

$$= -\frac{t^2}{2} e^{-2t} + \left(t \frac{e^{-2t}}{-2} - \int -\frac{1}{2} e^{-2t} \, dt \right)$$

$$= -\frac{t^2}{2} e^{-2t} - \frac{t}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2t}}{-2}$$

Dmague

$$I = 2 \left[e^{-2t} \left(-\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \left[e^{-2t} \left(-\frac{3}{2} - t^2 - t \right) \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= e^{-2} \left(-\frac{3}{2} - 1 - 1 \right) - \left(-\frac{3}{2} \right)$$

$$= -\frac{7}{2} e^{-2} + \frac{3}{2}$$

$$I = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} e^{-2}$$

ES. 4

$$f(z) = 3i + 2 - i \bar{z}^3$$

$$A = \{ f(z) \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{C} \text{ con } \text{Im} z = 0 \}$$

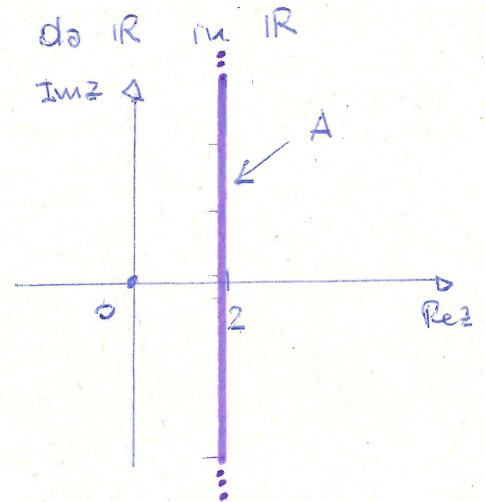
$$B = \{ z \in \mathbb{C} : f(z) = 29 + 3i \}$$

Disegnare A e B.

(A) $z = x + iy$ con $\text{Im} z = y = 0 \iff z = x \in \mathbb{R}$

$$f(z) = f(x) = 3i + 2 - i x^3 = 2 + i(3 - x^3)$$

Osservo che $x \mapsto 3 - x^3$ è 1-1 e inv. da \mathbb{R} in \mathbb{R}



(B) $3i + 2 - i \bar{z}^3 = 29 + 3i$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ -i \bar{z}^3 &= 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \bar{z}^3 &= 27i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ z^3 &= \overline{27i} = -27i = 27 e^{\frac{3}{2}\pi i} \end{aligned}$$

con $z = r e^{i\alpha}$ $r > 0$ e $\alpha \in [0, 2\pi)$ trovo

$$r^3 e^{3i\alpha} = (r e^{i\alpha})^3 = z^3 = 27 e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

$r^3 = 27 \iff r = 3$ e $3\alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
e quindi

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 3 e^{i\pi/2} = 3i & z_1 &= 3 e^{i7\pi/6} \\ z_2 &= 3 e^{i5\pi/6} & z_2 &= 3 e^{i11\pi/6} \end{aligned}$$

